TMV151

Introduktion till läsvecka 6

3 videoföreläsningarna om kapitel 6
2 räkneövningar och 1 datorövning (2 fysiska, 3 i zoom)
1 frågestund på onsdag 13:15
Läs kapitel 6
Räkna övningsuppgifter i kapitel 6, i första hand (a) och (b)
Räkna problemuppgifter och gör datorövningar i Matlab eller Python

Numerisk lösning av ODE

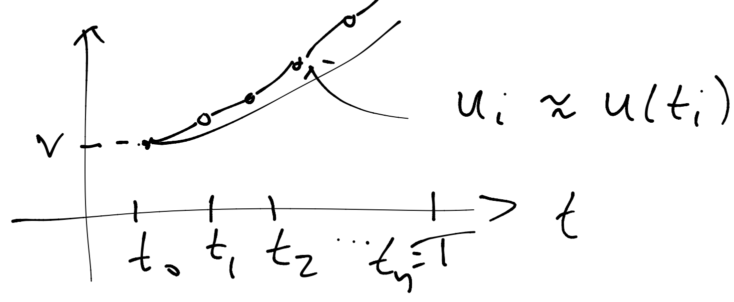
System av 1:a ordningens ODE

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t_0 < t \leq T \\ u(t_0) = v \end{cases}$$

u, v, f är vektorer av dimension d.

Vi delar in $[t_0, T]$ i n delintervall

$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$



På $[t_{i-1}, t_i]$ approximerar vi

$$u'(t) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{k_i}, \quad k_i = t_i - t_{i-1}$$

steglängd

differenskvot

$$f(t, u(t)) \approx \begin{cases} f(t_{i-1}, u_{i-1}), & \text{Eulers metod} \\ f(t_i, u_i), & \text{Implicit Euler} \\ f\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{u_{i-1}+u_i}{2}\right), & \text{Mittpunkts-metoden} \end{cases}$$

* Eulers metod (Explicit Euler)

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{k_i} = f(t_{i-1}, u_{i-1}) \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} u_i = u_{i-1} + k_i \cdot f(t_{i-1}, u_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n \\ u_0 = v \end{cases}$$

Ex: $u'(x) = u(x)$, $u(0) = 1$

Dela in $[0,1]$ i n lika långa delintervall och approximerar $u(1) = e$ med Eulers metod. $k_i = k = \frac{1}{n}$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{1/n} = u_{i-1} \Rightarrow u_i = u_{i-1} + \frac{1}{n} u_{i-1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_{i-1}$$

$i = 1, \dots, n$

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)u_{n-2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 u_{n-3} = \dots = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n u_0 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$u(t_n) = u(1) \approx u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

låt $n \to \infty$ $\quad e = u(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$

* Implicit Euler (Bakåt Euler)

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{k_i} = f(t_i, u_i) \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} u_i = u_{i-1} + k_i f(t_i, u_i) \\ u_0 = v \end{cases}$$

Kallas implicit eftersom en ekvation behöver lösas för att bestämma u_i

Fixpunktsiteration

Sök $x = u_{i-1} + k_i f(t_i, x) =: g(x)$

Startgissning $x_0 = u_{i-1}$

$$x^j = u_{i-1} + k_i f(t_i, x^{j-1})$$

$$u_i = \lim_{j\to\infty} x^j$$

Konvergens om $|g'(x)| < 1$ kontraktion

$$|g'(x)| = k_i |f'_x| < 1 .$$ k_i väljs tillräckligt litet.

* Mittpunktsmetoden

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{k_i} = f\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{u_{i-1}+u_i}{2}\right)$$ eller

$$\begin{cases} u_i = u_{i-1} + k_i f\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{u_{i-1}+u_i}{2}\right) \\ u_0 = v \end{cases}$$

Mittpunktsmetoden är implicit!

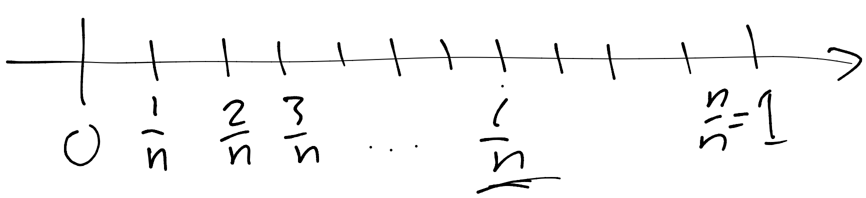
$$x = u_{i-1} + k_i f\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{u_{i-1}+x}{2}\right) =: g(x)$$

Startgissning $x = u_{i-1}$.

Fixpunktsiteration i varje tidssteg.

Ex: $u'(t) = u(t)$, $u(0) = 1$

Låt $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$, $k_i = k = \frac{1}{n}$



$$u_i = u_{i-1} + \frac{1}{n} \frac{u_{i-1}+u_i}{2} \Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)u_i = \left(1+\frac{1}{2n}\right)u_{i-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_i = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}} \cdot u_{i-1}$$

$$u_n = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}} u_{n-1} = \dots = \left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)^n \cdot 1 .$$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)^n .$$

* Konvergens

Låt $k_i = k$ $i=1,\dots,n$ konstant steglängd

Vi tittar på felet $|u(t_n) - u_n| \to 0$

då $k = \frac{t_n - t_0}{n} \to 0$

eller $n \to \infty$

Om $|u(t_n) - u_n| \leq C k^p$ säger vi

att metoden har konvergensordning p.

* Eulers metod

Om f är Lipschitz i u med

konstant L_f och $\max\limits_{t\in[t_0,t_n]} \left|\frac{d^2u}{dt^2}\right| \leq M$

då gäller $|u(t_n) - u_n| \leq \frac{M \cdot k}{2L_f}\left(e^{L_f(t_n - t_0)} - 1\right)$

Beviset bygger på Taylorutveckling.

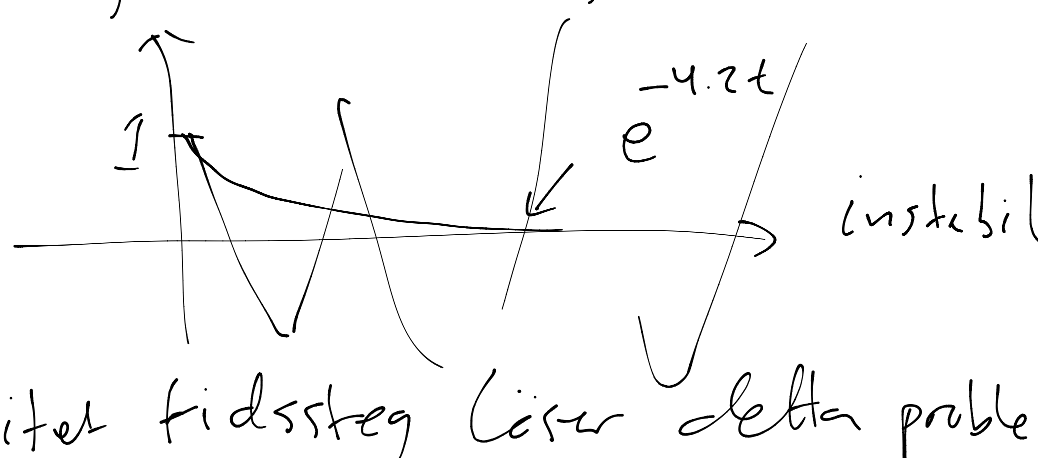
Eulersmetod är en 1:a ordningens metod.

Implicit Euler är också 1:a ordningen

Mittpunktsmetoden är 2:a ordningen

* Stabilitet

Eulers metod kan ge dåliga lösningar om tidssteget är för stort



litet tidssteg löser detta problem

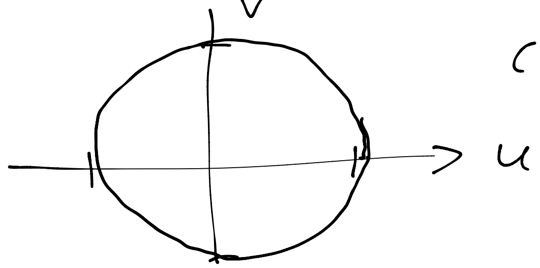
Implicit Euler och mittpunktsmetoden

är sällan instabila.

* Konservering av energi

$$u'' + u = 0 \qquad u(0) = 1 \quad u'(0) = 0 \qquad \Big| \; v = u'$$

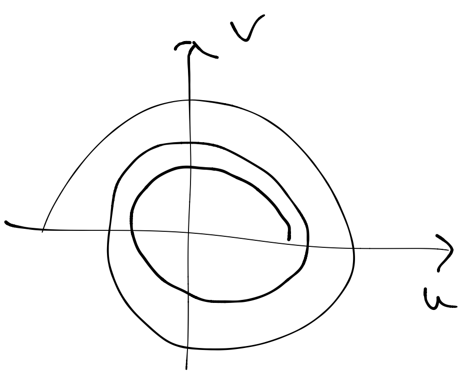
$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

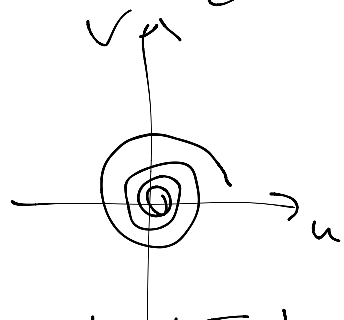


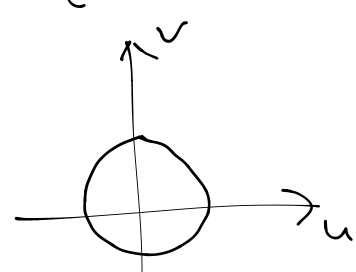
$$u' = v$$
$$v' = -u$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$







Eulers metod — Implicit Euler — Mittpunkt.

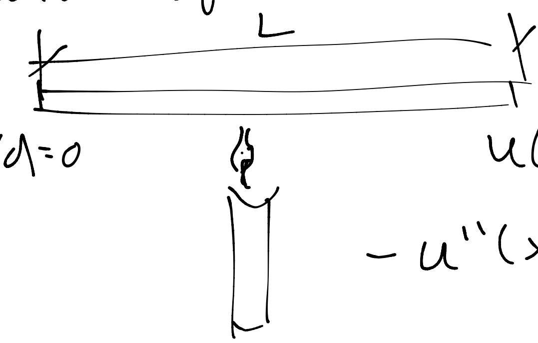
Eulers metod: billig, 1:a ordningen, kan vara instabil, ej energibevarande

Implicit Euler: dyrare, 1:a ordningen, stabil, ej energibevarande

Mittpunktsmetoden: dyrare, 2:a ordningen

stabil, bevarar energi

* Randvärdesproblem



u(x) temperatur

$$-u''(x) = q(x)$$

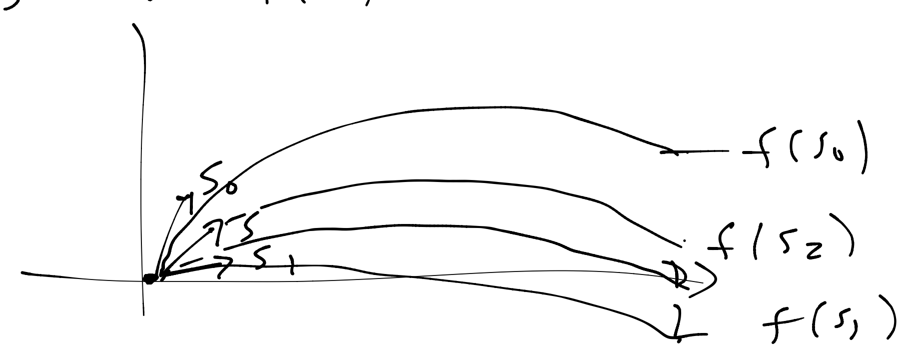
värmetillförsel

Låt $v = u'$

$$\begin{cases} u' = v & u(0)=0 \\ v' = -q & v(0)=? \end{cases} \quad \Big| \quad u(L)=0$$

Kan vi lösa detta med ODE metoder?

Vi gissar $v(0)=s$ och löser numeriskt $u(L)(s) = f(s)$. Vi försöker hitta s så att $f(s)=0$. Vi använder bisektion



Metoden kallas inskjutning.
Vi hittar s^* s.a $f(s^*) = 0$ eller
$u(L)(s^*) = 0$.