TMV151

Tentaräkning läsvecka 7

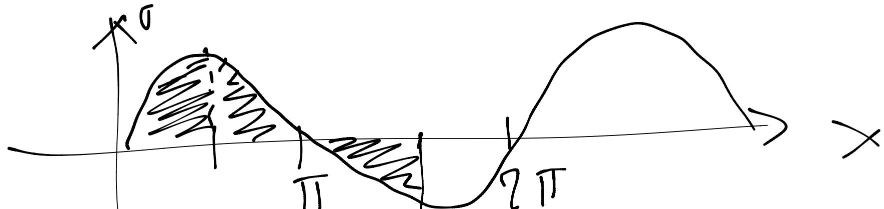
10 uppgifter där svar lämnas på svarsblankett. Ger 0 eller 3 poäng. Lämna in kortfattade uträkningar för kontroll.

4 uppgifter där fullständiga lösningar lämnas. Get 0-5 poäng.

Betyg 3 20-29
Betyg 4 30-39
Betyg 5 40-55 (varav 5 bonus)

2) Bestäm a så att så att

$$\int_0^a |\sin(x)|\,dx = 3$$

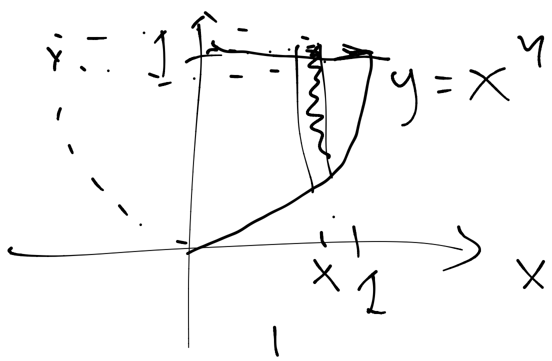


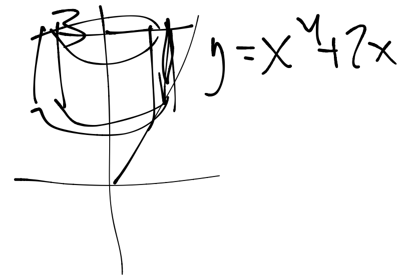
$$\int_0^{\pi/2} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 1 \Rightarrow \int_0^a |\sin(x)|\,dx = 3 \Rightarrow$$

$$a = \frac{3\pi}{2}.$$

4) Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området mellan $y = x^4$ och $y = 1$ och y-axeln roterar runt y-axeln





$$V = 2\pi \int_0^1 x\,(1-x^4)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}.$$

6) Lös $y'(x) + xy(x) = x$, $y(0) = 0$

Integrerande faktor $e^{x^2/2}$

$$\left(y(x)\,e^{x^2/2}\right)' = y'(x)\,e^{x^2/2} + x\,y(x)\,e^{x^2/2}$$

$$= e^{x^2/2}\left(y'(x) + xy(x)\right) =$$

$$= x\,e^{x^2/2}.$$

($y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$,

$$e^{P(x)} \Rightarrow \left(y(x) e^{P(x)} \right)' = y' e^{P(x)} + p(x) y e^{P(x)}$$

$$= e^{P(x)} \left(y' + p(x) y \right) = e^{P(x)} q(x) \Big)$$

$$y(x) e^{x^2/2} = e^{x^2/2} + C$$

$$y(x) = 1 + C e^{-x^2/2}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 1 + C = 0 \rightarrow C = -1$$

$$y(x) = 1 - e^{-x^2/2}$$

---

8) $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = x$

Karaktäristisk ekvation e^{rx}

insatt i den homogena ekvationen

$$(r^2 - 5r + 4) e^{rx} = 0 \quad \forall x$$

$$r^2 - 5r + 4 = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 4$$

$$\left((r-1)(r-4) = r^2 - 5r + 4 \right)$$

$$y_h(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$$

$$y_p(x) = A + Bx, \quad y_p'' = 0, \quad y_p' = B$$

$-5B + 4A + 4Bx = x \quad , \forall x$

$B = \frac{1}{4} \qquad -5B + 4A = 0 \Rightarrow 4A = \frac{5}{4}$

$A = \frac{5}{16}$

$y_p(x) = \frac{5}{16} + \frac{x}{4}$

$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \frac{x}{4} + \frac{5}{16}$

10) Skriv $\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t)^2 \end{cases}$

som andra ordningens ODE i variabeln $y = y_1$.

$y_1^2 = y_2' = y_1'' \Rightarrow y'' - y^2 = 0$

12) Visa att $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$

Genom att approximera $u' = u, u(0) = 1$ med implicit Euler, n del-intervall (lika långa) av $[0, 1]$.

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{k} = u_i \qquad i = 1, \dots, n, \quad k = \frac{1}{n}$$

$$u_i(1-k) = u_{i-1}$$ eller

$$u_i = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} u_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$u(1) \approx u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} u_{n-1} =$$

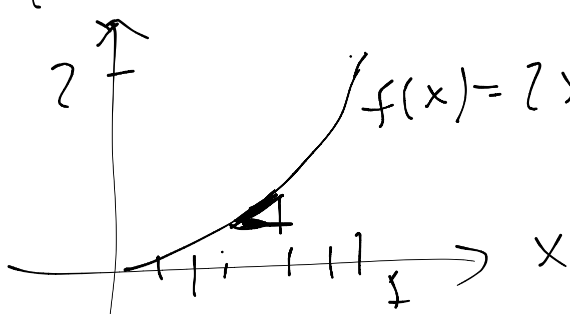
$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2} u_{n-2} = \dots = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} u_0 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Eftersom implicit Euler konvergerar ($u' = f(u) = u$, $L_f = 1$) och ($\frac{d^2}{dx^2} e^x \leq e \quad x \in [0,1]$)

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

14) Bestäm längden av $f(x) = 2x^{3/2}$ mellan $x = 0$ och $x = 1$



$$L = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \left\{ f'(x) = 3\sqrt{x} \right\} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\,dx = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} (1+9x)^{3/2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{27} \left(10^{3/2} - 1 \right)$$