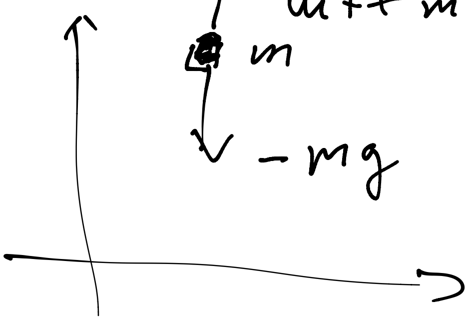
TMV151

Introduktion till läsvecka 3

3 videoföreläsningarna om kapitel 3
3 räkneövningar (3 fysiska, 2 i zoom)
1 frågestund på onsdag 09:00
Läs kapitel 3
Räkna övningsuppgifter i kapitel 3, i första hand (a) och (b)
Räkna problemuppgifter och gör datorövningar i Matlab eller Python

Ordinära differentialekvationer (ODE)

luftmotstånd $-kv(t)$



Newton's andra lag

$$F = ma = m\frac{d}{dt}v = m\dot{v}(t)$$

$$m\dot{v}(t) = -mg - kv(t), \quad v(0) = 0$$

Detta är en differentialekvation

Lösningen $v(t)$ är en funktion av t

Derivator av $v(t)$ ingår i ekvationen.

$v(0)=0$ kallas begynnelsevärde

En ODE har bara derivator med avseende på <u>en</u> variabel (t).

Annars partiell differentialekvation

(PDE).

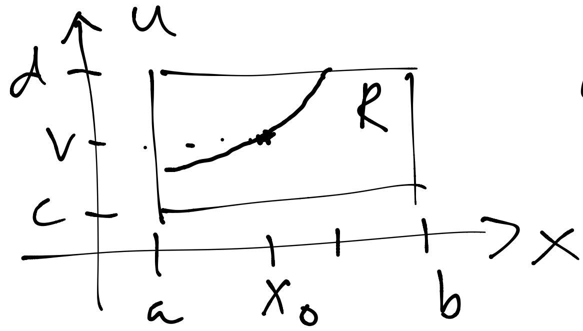
- Gravitationskraften, rörelse av föremål
- Elektromagnetiska kraften, elektriska fält
- Kvantfysik, atomers växelverkan

Existens och entydlighet av lösning (Picards sats)

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = v \end{cases}$$

Om f är kontinuerlig i x och Lipschitz-kontinuerlig i u då finns unik lösning $u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Om f är Lipschitz-kontinuerlig i u och kontinuerlig i x på



då har vi unik lösning

$u(x)$, $x_0-\delta \leq x \leq x_0+\delta$

Om $u'(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ u primitiv funktion till $f(x)$.

---

* Första och andra ordningens ODE

Högsta derivatan ger ordningen

<u>Ex</u>: $u''(t) + u(t) = 0$ har ordning 2

<u>Separabel ODE</u> (1:a ordningen)

Om $g(u)\, u'(x) = f(x)$

$$\Longleftrightarrow$$

$$u'(x) = f(x) \cdot g^{-1}(u)$$

$$\frac{d}{dx} G(u(x)) = g(u(x))\, u'(x) = f(x)$$

$$G(u(x)) = F(x) + C$$

$$\Rightarrow u(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Integrerande faktor (1:a ordningen)

Om $u'(x) + f(x)u(x) = g(x)$

linjär i u

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{e^{F(x)}}_{\uparrow} u(x)\Big) = f(x)e^{F(x)}u(x) + e^{F(x)}u'(x)$$

Integrerande faktor

$$= e^{F(x)}\big(u'(x) + f(x)u(x)\big) = e^{F(x)}g(x)$$

$$e^{F(x)}u(x) = \int e^{F(x)}g(x)\,dx$$

$$u(x) = e^{-F(x)}\int e^{F(x)}g(x)\,dx$$

~~Ett~~ begynnelsevillkor krävs för att bestämma konstanten.

Reduktion till 1:a ordningen

- $F(u'', u', x) = 0$ tex $u'' + xu' = x$

Låt $w = u'$, $F(w', w, x) = 0$

$$w' + xw = x$$

- $F(u'', u', u) = 0$ igen $w = u'$

* Linjära ODE

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x)$$

$$a_n(x)\, u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\, u^{(1)}(x) + a_0(x)\, u(x) = f(x)$$

n:te ordningens linjär ODE.

Om $f(x) = 0$ homogen linjär ODE och lösningen kallas homogenlösning

Om $f(x) \neq 0$ kallas lösningen partikulärlösning.

En linjär homogen n:te ordningens ODE har n lösningar (oberoende)

Om $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = 0$

endast är uppfyllt om

$u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n = 0$

Konstanta koefficienter

$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0 \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

Ansätt $u = e^{rt}$

$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$

$$e^{rt}\underbrace{(ar^2 + br + c)}_{\text{Karaktäristiska ekvationen}} = 0$$

har lösningar $r_1, r_2 \Rightarrow$

$u_1 = e^{r_1t}$ och $u_2 = e^{r_2t}$

Om $r_1 = r_2 = r \quad u_1 = e^{rt}, u_2 = te^{rt}$