TMV151

Introduktion till läsvecka 5

3 videoföreläsningarna om kapitel 5
2 räkneövningar och 1 datorövning (2 fysiska, 3 i zoom)
1 frågestund på onsdag 09:00
Läs kapitel 5
Räkna övningsuppgifter i kapitel 5, i första hand (a) och (b)
Räkna problemuppgifter och gör datorövningar i Matlab eller Python

System av ODE

* Matris och vektornotation

- Vektornotation

$$v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \quad v_i \in \mathbb{R}$$

Lista av tal (komponenter).

$\vec{v}$ eller $\mathbb{V}$ kan användas

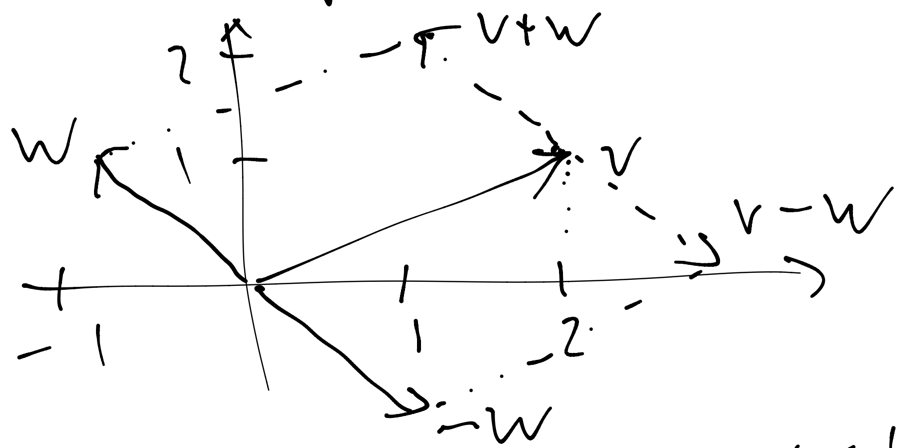
$$v + w = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] + [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$$
$$= [v_1 + w_1 \ \ v_2 + w_2 \ \dots \ v_n + w_n]$$
$$\alpha v = [\alpha v_1 \ \ \alpha_2 v_2 \ \dots \ \alpha v_n], \ \alpha \in \mathbb{R}$$
$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$
$$|v| = (v \cdot v)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2} \text{ längd}$$

\ skalärprodukt.

Ex: $v = [2 \quad 1]$, $w = [-1 \quad 1]$

$v + w = [1 \quad 2]$ $v - w = [3 \quad 0]$

$|v| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$



Vi kan skriva $v \in \mathbb{R}^n$.

– Matrisnotation $n \times m$ matris A är ett talschema

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

n rader m kolonner

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Matris-vektor multiplikation

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nm} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m \end{bmatrix}$$

Vi kan multiplicera $n \times m$ $m \times 1$

En radvektor $1 \times m$ $[\quad]$

en kolonnvektor $n \times 1$ $\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

- Linjära ekvationssystem $(n = m)$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$Ax = b$ där $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Ex: $x_1 + x_2 = 2$
$x_1 - x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substitution $x_2 = x_1 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$ $x_2 = 1$

* Linjärt system av ODE

$$u_1'(x) = a_{11}(x)\,u_1(x) + \dots + a_{1n}(x)\,u_n(x) + b_1(x)$$
$$u_2'(x) = a_{21}(x)\,u_1(x) + \dots + a_{2n}(x)\,u_n(x) + b_2(x)$$
$$\vdots$$
$$u_n'(x) = a_{n1}(x)\,u_1(x) + \dots + a_{nn}(x)\,u_n(x) + b_n(x)$$
$$u_j(0) = c_j \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$u'(x) = A(x)\,u(x) + b(x)$$
$$u(0) = v \quad , \quad v = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(x) & \dots & & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

* System av 1:a ordningens ODE

$$u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$$
$$u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), \dots, u_n(x))$$
$$\vdots$$
$$u_n'(x) = f_n(x, u_1(x), \dots, u_n(x))$$

$u_j(c) = c_j \quad j = 1, \ldots, n$

$\rightarrow u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(c) = v$

$$v = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

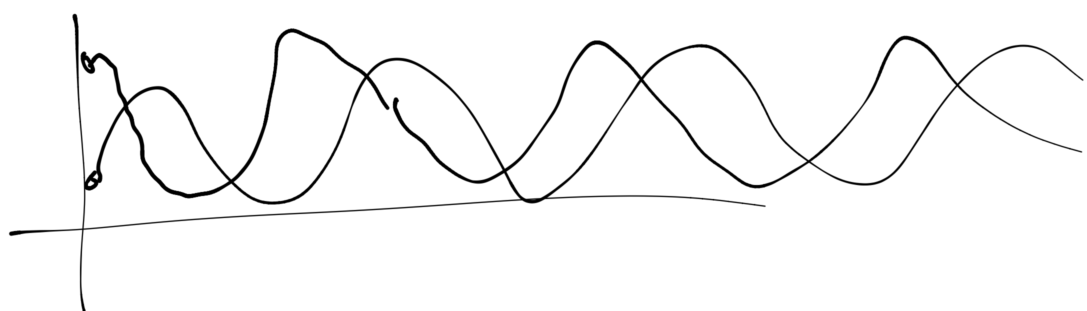
$u(x)$ kallas vektorvärd funktion.

Ex: Populationsdynamik (kap 7.2)

$$\begin{cases} u_1'(t) = a u_1(t) - b u_1(t) \cdot u_2(t) = f_1 \\ u_2'(t) = -c u_2(t) + d u_1(t) \cdot u_2(t) = f_2 \end{cases}$$

$a, b, c, d \geq 0.$

$u'(t) = f(t, u(t))$



- Högre ordningens ODE kan skrivas som system av 1:a ordningen.

$$u^{(n)}(x) = F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n-1)})$$

$$u^{(i)}(0) = c_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Låt $u_i = u^{(i-1)}$ $\quad u_1 = u \quad u_2 = u' \quad u_3 = u'' \quad \dots$

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x) \\ u_2'(x) = u_3(x) \\ \vdots \\ u_{n-1}'(x) = u_n(x) \\ u_n'(x) = F(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \end{cases}$$

$$u_i(0) = c_{i-1} \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

$$u(x) = u_1(x)$$

– Existens och entydighet

Picards sats.

$$u'(x) = f(x, u(x)) \qquad u(0) = v$$

Om f är kontinuerlig i x och

Lipschitzkontinuerlig i u så har vi entydig lösning för alla $x \in \mathbb{R}$.

- linjära system av ODE har lösning för alla $x \in \mathbb{R}$

$$u'(x) = A(x)u(x) + b(x), \quad u(x_0) = v$$

---

* Definition av elementära funktioner

$$\exp(x), \ \ln(x), \ \sin(x), \cos(x), \ldots$$

Definition $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Definierar vi istället $u(x) = \exp(x)$ som entydiga lösningen till

$$u'(x) = u(x), \quad u(0) = 1.$$

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$$

$$\exp(1) = e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Låt $z(u(x)) = x$

derivera $1 = \frac{d}{dx} z(u(x)) = z' \cdot u'(x)$

$$= z' \cdot u \Rightarrow z' = \frac{1}{u}$$

$$z(x) - z(1) = \int_1^x \frac{1}{u}\,du$$

$$u(0) = 1 \Rightarrow z(1) = z(u(0)) = 0$$

$$\ln(x) = z(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\,du$$

- $\cos x$, $\sin x$ $\quad u'' + u = 0$