TMV151

Frågestund läsvecka 5

5.11 c) $u'(t) + Au(t) = b(t) \quad u(0) = u_0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \quad u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

Skriv som 2:a ordningens ODE och lös.

- System: Existens och entydighet
  Numerisk lösning (kap 6) (allmänt)

- Högre ordningen: Analytiska lösningar (enklare fall, linjär ODE konstanta koefficienter)

$u_1' - u_2 = 0 \rightarrow u_1' = u_2$

$u_2' - 6u_1 - u_2 = e^{-2t} \Rightarrow u_1'' - u_1' - 6u_1 = e^{-2t}$

$u_{1,h}'' - u_{1,h}' - 6u_{1,h} = 0$ ansätt e^{rt}

$e^{rt}(r^2 - r - 6) = e^{rt}(r-3)(r+2) = 0$

$r_1 = 3$ och $r_2 = -2$

$u_{1,h}(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t}$

För att bestämma partikulärlösningen ansätter vi $u_{1,p}(t) = Cte^{-2t}$

$u_{1,p}'(t) = Ce^{-2t} - 2Cte^{-2t}$

$u_{1,p}''(t) = -2Ce^{-2t} - 2Ce^{-2t} + 4Cte^{-2t} = e^{-2t}C(4t-4)$

$u_{1,p}''(t) - u_{1,p}' - 6u_{1,p} = e^{-2t}C(4t - 4 - 1 + 2t - 6t) = -5Ce^{-2t}$

$= e^{-2t} \rightarrow C = -\frac{1}{5}$ $u_{1,p}(t) = -\frac{1}{5}te^{-2t}$

$u(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t} - \frac{1}{5}te^{-2t}$, $u(0) = 1$ $u'(0) = -\frac{11}{5}$

$u(0) = A + B = 1$, $B = 1 - A$

$u'(0) = 3A - 2B - \frac{1}{5} = -\frac{11}{5} \Rightarrow 3A - 2B = -2$

$\Rightarrow 3A - 2 + 2A = -2 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow B = 1$

$u(t) = e^{-2t} - \frac{1}{5}te^{-2t} = u_1(t)$

$u_2(t) = u'(t) = -2e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}te^{-2t}$

$= e^{-2t}\left(\frac{2}{5}t - \frac{11}{5}\right)$.

5.17b) Bestäm Lipschitzkonstanten för

$f(u) = \sin(u)$

$\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

Vi vill ha en L_f för alla $x \in \mathbb{R}$.

Vi vill då uttrycka storlek (norm) för funktioner $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

Vi vill visa $\max_{x \in \mathbb{R}} |f(u(x)) - f(v(x))| \leq L_f \max_{x \in \mathbb{R}} |u(x) - v(x)|$

$\|f(u) - f(v)\| \leq L_f \|u - v\|$

Från medelvärdessatsen för derivator

för varje x $f(u(x)) - f(v(x)) = f'(\bar{u}_x)(u(x) - v(x))$

$\bar{u}_x \in [u(x), v(x)]$

$$|\sin u(x) - \sin v(x)| = |\cos \bar{u}x| \cdot |u(x) - v(x)|$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\sin u(x) - \sin v(x)| \leq 1 \cdot \max_{x \in \mathbb{R}} |u(x) - v(x)|$$

$\uparrow$ L_f $\quad \forall u, v$

$u'(x) = \sin(u(x))$, $u(x_0) = u_0$

har entydig lösning $\forall x$.

5.186) $f(x, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ 4u \end{bmatrix}$

Är denna Lipschitz?

$$\left| f(x, \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}) - f(x, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}) \right| = \left| \begin{bmatrix} -v_1 \\ 4u_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -v_2 \\ 4u_2 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} v_2 - v_1 \\ 4u_1 - 4u_2 \end{bmatrix} \right| \leq \sqrt{(4u_1 - 4u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}$$

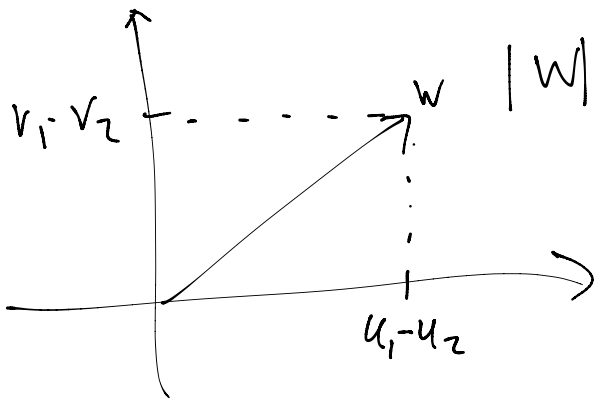
$$= \left\{ \left| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} \right\} =$$

$$= \sqrt{16 (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{16 (u_1 - u_2)^2 + 16 (v_1 - v_2)^2} \leq$$

$$\leq 4 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} = 4 \left| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right|$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x, \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}) - f(x, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}) \right| \leq 4 \max_{x \in \mathbb{R}} \left| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right|$$



$|w| = \sqrt{(u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2}$

5.24 cd) Visa att $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

genom att derivera $\sin x$ som lösning till

$z(x) = \sin x \quad z'' + z = 0, \; z(0) = 0, \; z'(0) = 1$

$w(x) = \cos x \quad w'' + w = 0, \; w(0) = 1, \; w'(0) = 0$

Låt $u'' + u = 0, \; u(0) = \alpha \quad u'(0) = \beta$

Ekvationen har två oberoende lösningar

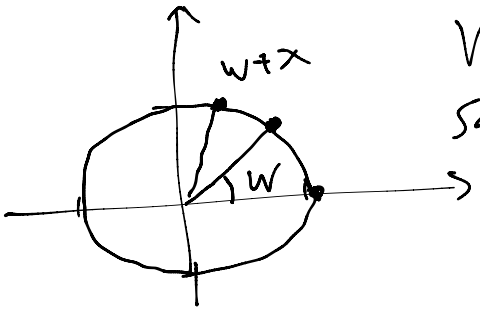
$u(x) = A\cos x + B\sin x, \; u(0) = A = \alpha$

$u'(0) = B = \beta$

$u(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$

Välj $\alpha = \sin w \quad \beta = \cos w$

$u(x) = \sin w \cos x + \cos w \sin x$



Vill visa att detta är samma som $\sin(x+w)$

$v(x) = \sin(x+w)$

Given $v''(x) + v(x) = 0$

$v(0) = \sin(w) \quad v'(0) = \cos(w)$

$\sin w \cos x + \cos w \sin x = \sin(x+w)$

Let $w = x \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Deriving get $\cos(x+w) = \frac{d}{dx} \sin(x+w)$

$= -\sin w \sin x + \cos w \cos x$

$w = x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5.13b) $u'' - 2u' - 3u = x$, $u(0) = 1, u'(0) = 0$

Lös $u_h(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}$

$r^2 - 2r - 3 = 0$

$r_1 = -1, r_2 = 3$

Ansätt $u_p(x) = Cx + D$

$u_p'(x) = C$

$-2C - 3(Cx + D) = x \Rightarrow C = -\frac{1}{3}, D = \frac{2}{9}$

$u(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

$u(0) = A + B + \frac{2}{9} = 1 \Rightarrow A + B = \frac{7}{9} \quad 4B = \frac{10}{9}$

$u'(0) = -A + 3B - \frac{1}{3} = 0 \quad -A + 3B = \frac{1}{3} \quad B = \frac{5}{18}$

$u(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{18}e^{3x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \qquad A = \frac{1}{2}$

Let $u_1 = u \quad u_2 = u'$

$u_1' = u_2$

$u_2' = x + 3u_1 + 2u_2$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$$