

1 Matematisk statistik LMA521, LKT325, HT 2020

Detta är en av flera föreläsningar i inledande sannolikhetslära och matematisk statistik.

Innehåll

1	Matematisk statistik LMA521, LKT325, HT 2020	1
2	Föreläsning I	1
2.1	Lite om statistik	1
2.2	Sannolikhetslära	2
2.2.1	Betingad sannolikhet	4
2.2.2	Oberoende händelser	4
2.3	Mer om operationer mellan händelser	5

2 Föreläsning I

2.1 Lite om statistik

Vi inleder med lite deskriptiv statistik.

Ex 1.1 Givet 5 *observerade värden* på restid mellan Vänersborg och Göteborg C, enhet minuter:

$$\{54.4, 55.2, 58.2, 57.3, 54.9\}.$$

Man kallar detta ett observerat stickprov av storlek $n = 5$.

Vad säger oss medelvärdet $\bar{x} = 56.0$ och vad säger oss standardavvikelsen $s = 1.65$? Medelvärdet är *lägesmått* och s (och s^2) ett spridningsmått. Det senare beräknas via s^2 , som är

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2, \text{ med } n = 5 \text{ och } x_1 = 54.4, \quad x_2 = 55.2, \dots, x_5 = 54.9.$$

Varför man dividerar med $n - 1 = 4$ och inte med $n = 5$ förklaras senare i kursen.

■

Ex 1.2 Vid ett observerat stickprov av storlek $n = 100$ av studietiden i år för ingenjörsstudenter, fick man medelvärdet $\bar{x} = 3.5$ och standardavvikelsen till $s = 0.5$, enhet år.

■

Kommentarer

- I det sista exemplet och i det förra har vi observerade värden. Vi vet inte direkt hur vi kan använda dessa för att uttala oss om tåget kommer i tid eller om hur studenter klarar av att få examen i tid.
- Längre fram, när vi läser Matematisk statistik, kan vi lära oss om att uttala kvalitativt och kvantitativt om sådana mätvärden.
- Vägen till Matematisk statistik går vi Sannolikhetslära.
- Vi passar på att skriva *om* standardavvikelsen:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{k=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{k=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right]. \end{aligned}$$

Vi observerar att uttrycket är ≥ 0 , eftersom i VL är det en summa av kvadrater.

2.2 Sannolikhetslära

För kunna beräkna *sannolikheter*, behövs begreppet *händelse*.

Ex 1.3 En händelse beskriver ett skeende, ex.vis händelsen att vid *ett* kast med *en* tärning, få , säg, minst 5 poäng.

Hur sannolikheten beräknas, behövs ett sannolikhetsmått P på hur troligt det är att få denna händelse.

För detta behövs begreppet *utfall*. För en vanlig tärning finns 6 utfall:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} =: \Omega.$$

Rummet (sannolikhetsrummet) innehåller samtliga utfall.

Ex 1.4 Att få minst 5 poäng är en *händelse*, säg $A = \{5, 6\}$. Händelser och utfallsrum följer samma lagar som mängder. Därför är det bra att erinra sig den mängdlära som man har lärt sig. För A gäller att A är en delhändelse till Ω :

$$A \subseteq \Omega.$$

Låt oss införa händelsen att vid två kast med en tärning är A som ovan men för första kastet och händelsen B att *poängsumman* för de två kasten är minst 9.

Intressant är hur sannolikheten fördelas på de 6 utfallen vid ett kast med en tärning. Det är rimligt att för det första kastets poäng (D.v.s. för *ett* kast), så är sannolikheten för tärningens poäng lika för alla 6 utfallen.

Sannolikheten betecknar vi nu med P eller p . Man definierar $P(\Omega) = 1$ och tolkas om att sannolikheten att få något av utfallen i Ω , är 1 (= 100%).

Ex 1.5 Att sannolikheten för samtliga utfall är lika betyder att man har en *likformig sannolikhetsfördelning*. Händelsen att får ex.vi en tvåa vid ett kast, kan vi skriva $\{2\}$. För en vanlig tärning är $P(\{2\}) = \{\text{eller bara } 2\} = P(2) = \frac{1}{6}$. Och p.s.s. för alla de sex utfallen

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

Sannolikheten $P(A)$ för händelsen A , skriver vi nu som p . Vi kan beräkna sannolikheten m.h.a. den *elementära sannolikhetsdefinitionen*.

$$p = \frac{g}{m}. \quad (1)$$

där m = antal *möjliga* utfall och g = antal *gynnsamma* utfall. Definitionen gäller endast då man har likformig sannolikhetsfördelning.

Ex 1.6 I vårt exempel har vi sannolikheten $P(A)$. Den kan beräknas som i (1). Först ser vi att

$$m = |\Omega| = 6 \text{ och } g = |A| = |\{5, 6\}| = 2 \text{ så att } p = P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Hur beräknar vi sannolikheten för B ? Vi inför ett annat utfallsrum, vars utfall vi skriver som $\{(x, y)\}$, där x är utfallet av första kastet och y av andra. Detta ger ett utfallsrum som vi skriver

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & (4, 6) \\ \hline (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & (6, 6) \end{array} \right\} \quad (2)$$

där " (x, y) " betyder j och k poäng på kast 1 respektive 2 och där händelsen B är markerat med röda siffror.

- Händelsen A innehåller utfallen under det vågräta strecket. Vi borde skriva $A = \{(5, 1), (5, 2) \dots, (6, 6)\}$, sett ur (2) men det räcker med att skriva $A = \{5, 6\}$.
- Vi beräknar nu händelsen B m.h.a. (1) (Obs! sannolikheten för de 36 utfallen är alla lika = $\frac{1}{36}$, d.v.s. likformig sannolikhetsfördelning):

$$m = 36 \text{ och } g = 10 \implies P(B) = \frac{5}{18}.$$

- Vi beräknar $A \cap B$, d.v.s. *snittet* av A och B och sannolikheten för denna händelse.

$$A \cap B = \{(5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

d.v.s. 7 utfall, så sökt sannolikhet är $P(A \cap B) = \frac{7}{36}$. *Komplementhändelsen* till A är $\Omega \setminus A = A^c = \{1, 2, 3, 4\}$ med sannolikheten

$$1 - P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Allmänt gäller

$$P(A^c) = 1 - P(A) \text{ eller } P(A) + P(A^c) = 1, \quad (3)$$

2.2.1 Betingad sannolikhet

Man kan undra om händelsen A påverkar händelsen B , mer exakt, vad är sannolikheten för B om A inträffar?

Ex 1.7 Vi frågar oss följande: Vi vet sannolikheten för $A \cap B$, som ju är $7/36$. Är den sannolikheten densamma givet att A har inträffat? Att A innebär en högre poäng på första kastet borde påverka gynnsamt, så att sannolikheten för B borde vara högre om A inträffar, än om vi inte förutsätter något alls om första kastets utfall.

Sannolikheten för B givet att A inträffar skrivs $P(B|A)$ och är en betingad sannolikhet. Den definieras som sannolikheten

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (4)$$

I vårt genomgående exempel är

$$P(B|A) = \frac{7/36}{1/3} = \frac{7}{12}.$$

2.2.2 Oberoende händelser

Vi inför nu en tredje händelse C , att andra kastets poäng är högst 4. Vi skall beräkna $P(C|A)$, d.v.s. sannolikheten att andra kast ger poäng högst 4 givet att första kast ger minst 5 poäng.

■

Det är rimligt att första kasts poäng inte påverkar andra kasts poäng (och vice versa). Uttryckt med beteckningar som ovan, borde gälla att

$$P(C|A) = P(C).$$

Ex 1.8 Vi beräkna båda sannolikheterna:

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ och } P(C) = \frac{24}{36} = \dots = \frac{2}{3}$$

alltså lika. Att de är lika, uttrycks som att A och C är *oberoende* händelser.

■

Ur (4) och likheten $P(C) = P(C|A)$ följer

$$P(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \iff P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C), \quad (5)$$

där den sista likheten är definitionen för att två händelser är oberoende.

Ex 1.9 Visa att om A och B är oberoende, så är A och B^c oberoende.

Bevis:

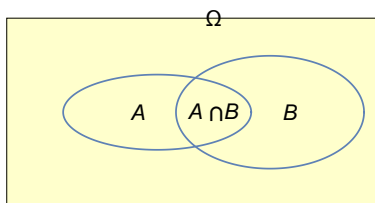
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

■

■

2.3 Mer om operationer mellan händelser

För två händelser A och B kan det vara bra att rita ett *Vennndiagram*:



Det innehåller de två händelserna samt ett gemensamt område $A \cap B$, ett område utanför $A \cup B$, totalt fyra områden.

- Vi ser att A och B inte är oberoende i föregående avsnitt.
- Vi skall nu beräkna $A \cup B$ och sannolikheten för denna händelse. Det är händelsen för att A *eller* B inträffar.

P.g.a. likformig sannolikhetsfördelning, är sannolikheten för de 36 utfallen alla lika med $\frac{1}{36}$. Vi behöver bara räkna antal utfall i $A \cup B$. Det är

$$|A \cup B| = 15, \quad |A| = 12, \quad |B| = 10,$$

där vi även har beräknat antal utfall i A och B. Vi ser att $|A| + |B| = 22$ och inte 15. I summan $|A| + |B| = 22$ är elementen i snittet $A \cap B$ räknade två gånger. Vi ser att, genom att dra från sannolikheten för $A \cap B$ en gång, får vi likheten

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (6)$$

Antag att D är händelsen att få en etta vid första kast. Då är $P(D) = \frac{1}{6}$. Vi ser att händelsen D och A inte har några gemensamma utfall: $A \cap D = \emptyset$, den *tomma händelsen*. Sannolikheten för denna händelse är 0 eftersom den inte innehåller något utfall. Speciellt blir (6) extra enkel:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (7)$$

Speciellt, gäller att $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ och att denna union är disjunkt. Alltså är (Jämför med (3))

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c). \quad (8)$$

d.v.s. man kan dela in händelsen A i två disjunkta händelser, dels i $A \cap B$, det som A har gemensamt med B och del i $A \cap B^c$, det som A har gemensamt med B^c .

Kommentarer

1. Samtliga numrerade likheter (formler), utom den elementära sannolikhetsdefinitionen, gäller genomgående, inte bara för likformig sannolikhetsfördelning
2. För snitt gäller $A \cap B = B \cap A$. Nu kan (4) som $P(B|A)P(A) = P(A \cap B)$. Således är

$$P(B|A)P(A) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B) (= P(A \cap B)), \quad (9)$$

som kallas *Bayes sats*.

Ex 1.10 Visa att betingad sannolikhet uppfyller

$$P(B|A) + P(B^c|A) = 1,$$

d.v.s. betingad sannolikhet fungerar som "vanligsannolikhet med A som utfallsrum.

Bevis:

$$VL = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap B^c)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 = HL.$$

■
■

Ex 1.11 Givet händelsen A_1 att första tärningskastets päng är 5. Beräkna $P(A_1)$ och visa att $A_1 \subset A$. Vilken inklusion gäller mellan A^c och A_1^c ?

Lösning:

$$P(A_1) = \frac{1}{6}.$$

Eftersom alla utfall i A_1 (som ju bara innehåller utfallet 1) också ligger i A , så gäller $A_1 \subset A$.

$$A^c = \{1, 2, 3, 4\} \subset A_1^c = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

■

Ex 1.12 Antag att A och B är oberoende händelser med sannolikheter $1/3$ respektive $2/5$. Beräkna

1. $P(A \cap B)$.
2. $P(A \cup B)$.
3. $P(A^c \cap B^c)$.
4. $P(A \setminus B)$.
5. $P((A \cup B) \setminus (B \cap A))$.

Lösning:

1.

$$P(A \cap B) = \{\text{ober.}\} = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{15}.$$

2.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \{\text{enligt (6)}\} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \{\text{ober.}\} = \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

3. För att beräkna $P(A^c \cap B^c)$ behöver vi en identitet från mängdlära. Den är

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c. \quad (10)$$

Det är en av två av de Morgans lagar. Den ger att

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 2 - P(A \cup B) = \frac{2}{5}.$$

4. Återigen behöver vi lite mängdlära. $A \setminus B$ betyder händelsen/mängden av det som ligger i A men inte i B . Man kan visa att

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Vi kan nu utnyttja, att A och B är oberoende, ty då är även A och B^c oberoende. Således är

$$P(A \setminus B) = P(A)P(B^c) = P(A)(1 - P(B)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}.$$

5. Mängden/Händelsen $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) =: P(A \Delta B)$ och kallas symmetrisk differens. Observera att $A \setminus B$ och $B \setminus A$ är disjunkta, så att

$$P(A \Delta B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A).$$

Den första termen har vi i 4. För den andra termen har vi

$$P(B \setminus A) = P(B \cap A^c) = \{\text{ober.}\} = P(B)(1 - P(A)) = \frac{4}{15},$$

så att

$$P((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}.$$

■

Kommentarer

- Sannolikheten för symmetrisk differens $A \Delta B$ kan även skrivas

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

och således kan den beräknas som

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15}, \text{ d.v.s. som innan.}$$

- Ett annat sätt att beräkna den på är

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \{\text{ober.}\} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

Ex 1.13 För kommunikation från radarstation A till station B används nollor och ettor (d.v.s. binär kodning). Sannolikheten att en mottagen nolla är en sänd etta är 0.1 och sannolikheten att en sänd etta mottas som en nolla är 0.05. 60% av sända siffror är ettor. Vad är sannolikheten att en sänd nolla mottas som en nolla?

Lösning:

Låt S_0 vara händelsen att det sänds en nolla och M_0 händelsen att det mottas en nolla. Vi har då följande sannolikheter:

$$P(S_1|M_0) = P(S_0^c|M_0) = 0.1, \quad P(M_0|S_0^c) = P(M_0|S_1) = 0.05 \text{ och } P(S_1) = 0.6.$$

Vi söker alltså sannolikheten $P(M_0|S_0)$, som vi skriver

$$x := P(M_0|S_0) = \frac{P(M_0 \cap S_0)}{P(S_0)} = \frac{P(M_0)}{P(S_0)} \cdot P(S_0|M_0).$$

Nu är

$$P(M_0) = \underbrace{P(M_0|S_0)}_{=x} P(S_0) + P(M_0|S_1)P(S_1).$$

Vi får

$$\begin{aligned} x &= \frac{P(S_0|M_0)}{P(S_0)} \cdot (P(S_0)x + P(M_0|S_1)P(S_1)) \iff \\ x &= \frac{P(S_0|M_0)P(M_0|S_1)P(S_1)}{(1 - P(S_0|M_0))P(S_0)} = \frac{P(S_0|M_0)P(M_0|S_1)P(S_1)}{P(S_1|M_0)P(S_0)} = \frac{0.9 \cdot 0.05 \cdot 0.6}{0.1 \cdot 0.4} = 0.675. \end{aligned}$$