Övningshjälp

Nedan finns tips och ledning till de rekommenderade övningarna. Jag har inte löst dem helt, utan tanken är att du ska fylla i det som saknas. (Jag har inte skrivit ut svaren, dem hittar du i läroboken). Det är viktigt att träna att räkna med penna och papper.

17.1: Alla differentialekvationerna nedan är homogena, av ordning 2, med konstanta koefficienter och linjära.

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

Så det går att bestämma lösningarna genom att bestämma rötterna till den karekteristiska ekvationen

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

1: r_1, r_2 reella och $r_1 \neq r_2$: Lösningen ges av $y(x) = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}$

2: r_1, r_2 reella och $r_1 = r_2$ $(= r_0)$: Lösningen ges av $y(x) = c_1 \cdot e^{r_0 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{r_0 x}$

3: r_1, r_2 komplexa, $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$: Lösningen ges av $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x))$

c_1 och c_2 är konstanter.

17.1.1 $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0 \Rightarrow$ Karekteristisk ekvation $r^2 - r - 6 = 0$ som har två reella rötter $r_1 = \ldots$ och $r_2 = \ldots$. Lösningarna ges av det 1:a fallet ovan: $y(x) = \ldots$.

17.1.3 $y''(x) + 2y(x) = 0 \Rightarrow$ Karekteristisk ekvation $\ldots$ som har två komplexa rötter $r_1 = \ldots$ och $r_2 = \ldots$. Lösningarna ges av det 3:e fallet ovan $y(x) = \ldots$

17.1.5 $4y''(x) + 4y'(x) + y(x) = 0 \Rightarrow$ Karekteristisk ekvation $\ldots$ som har en dubbelrot $r_0 = \ldots$. Lösningarna ges av det 2:a fallet ovan $y(x) = \ldots$

17.1.9 Lös på samma sätt som i uppgift 1, 3, 5 ovan

17.1.11 $2y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0$. Lös på samma sätt som uppgift 1, 3, 5 ovan

17.1.17 $y''(x) + 3y(x) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3 \Rightarrow$ Karekteristisk ekvation $r^2 + 3 = 0$ som har två komplexa rötter $r_{1,2} = \ldots$. Lösningarna ges av det 3:e fallet ovan $y(x) = \ldots$.

Med hjälp av begynnelsevärdena $y(0) = 1, y'(0) = 3$ bestämmer man värdena på konstanterna c_1 och c_2: $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x) \Rightarrow y'(x) = \ldots$ och
$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cos(\sqrt{3} \cdot 0) + c_2 \cos(\sqrt{3} \cdot 0) \Rightarrow c_1 = \ldots$
$y'(0) = 3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow c_2 = \ldots$

17.1.19 , 17.1.21, 17.1.23 Lös på samma sätt som 17.1.17

17.1.27 $y''(x) + 4y(x) = 0, y(0) = 5, y(\pi/4) = 3$ kallas randvärdesproblem. Bestäm lösningarna $y(x)$ på samma sätt som i 17.1.17. Använd sedan värdena på $y(0)$ och $y(\pi/4)$ för att bestämma värden på konstanterna c_1 och c_2