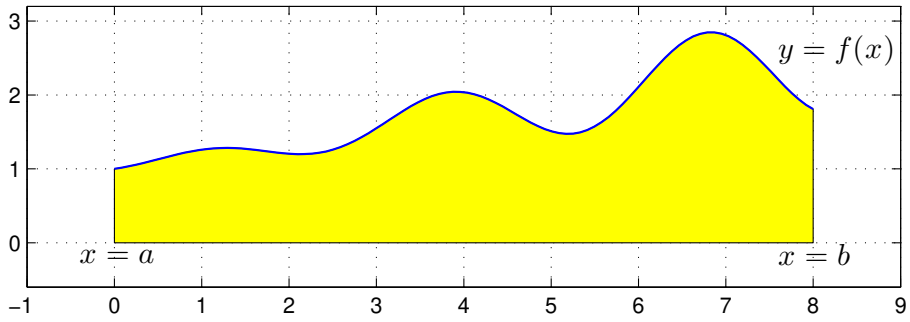
Integraler

1 Inledning

Ibland kan man inte bestämma integraler exakt utan man får nöja sig med att beräkna approximationer. T.ex. $\int_0^1 \exp(x^2)\,dx$ kan inte beräknas exakt, eftersom det inte finns någon användbar primitiv funktion. Det kan också vara så att integranden bara är känd i vissa punkter, t.ex. vi har en serie med mätdata.

2 Beräkningsmetoder

Den geometriska tolkningen av integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ är arean av ytan mellan grafen av integranden $y = f(x)$ och x-axeln, dvs. $y = 0$, mellan $x = a$ och $x = b$.



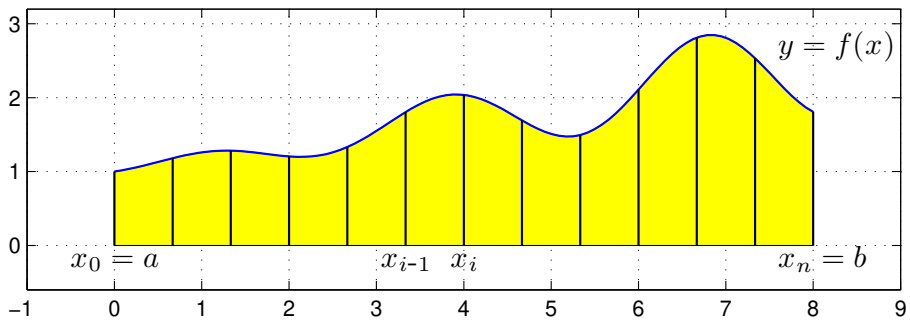
Vi gör en likformig indelning av intervallet $a \le x \le b$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

så att vi får n lika långa delintervall $x_{i-1} \le x \le x_i$ med bredden $h = \frac{b-a}{n}$.

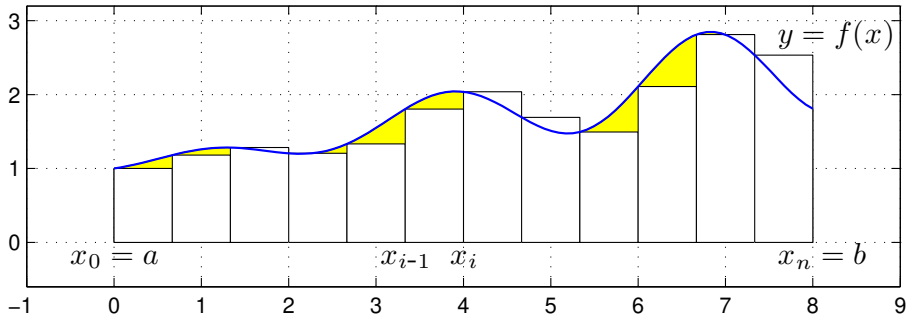
Sedan delar vi upp integralen i en summa av delintegraler över varje delintervall

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$



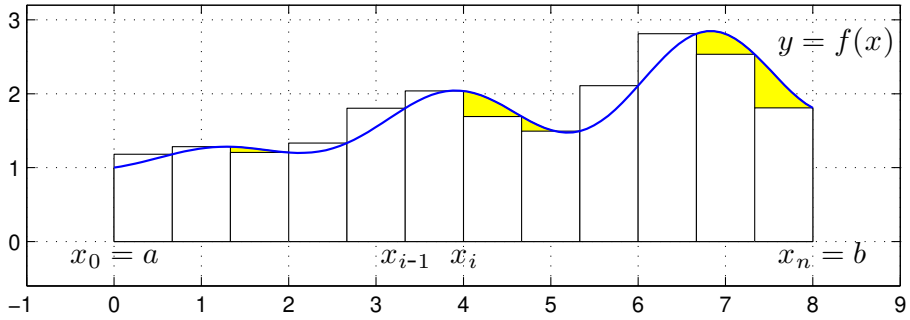
Om vi approximerar $f(x)$ med $f(x_{i-1})$ i intervallen $x_{i-1} \le x \le x_i$ får vi **vänster rektangelregel**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\, f(x_{i-1})$$



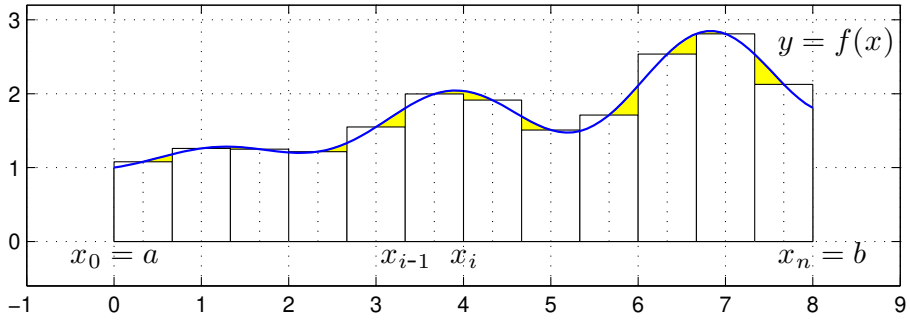
Om vi approximerar $f(x)$ med $f(x_i)$ i intervallen $x_{i-1} \le x \le x_i$ får vi **höger rektangelregel**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\, f(x_i)$$



Om vi approximerar $f(x)$ med $f(m_i)$ i intervallen $x_{i-1} \le x \le x_i$, där m_i är mittpukterna i intervallen, får vi **mittpunktsmetoden**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \sum_{i=1}^{n} h\, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$



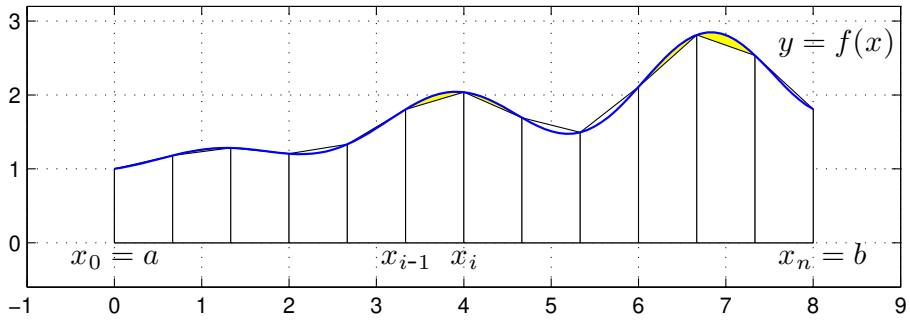
I Stewart kapitel 5 definieras (konstrueras) integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ med hjälp av Riemannsumman

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Metoderna ovan är olika varianter av Riemannsummor, med $\xi_i = x_{i-1}$, $\xi_i = x_i$ respektive $\xi_i = m_i$, och $\Delta x_i = h$.

Vi kan också approximera integralen med medelvärdet av vänster och höger rektangelregel och får då **trapetsmetoden**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\,(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$



Antag att vi vill beräkna $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$ med vänster rektangelregel med $n = 100$. Vi skulle kunna göra så här

```
>> n=100;
>> a=0; b=1;
>> f=@(x)x.*sin(x);
>> h=(b-a)/n
>> q=0;
>> for i=0:n-1
       x=a+i*h;
       q=q+h*f(x);
   end
>> q
```

Att använda en `for`-sats är oftast inte effektivt i MATLAB. Vi genererar hellre en vektor av alla funktionsvärdena $f(x_i)$ och sedan summerar dessa enligt

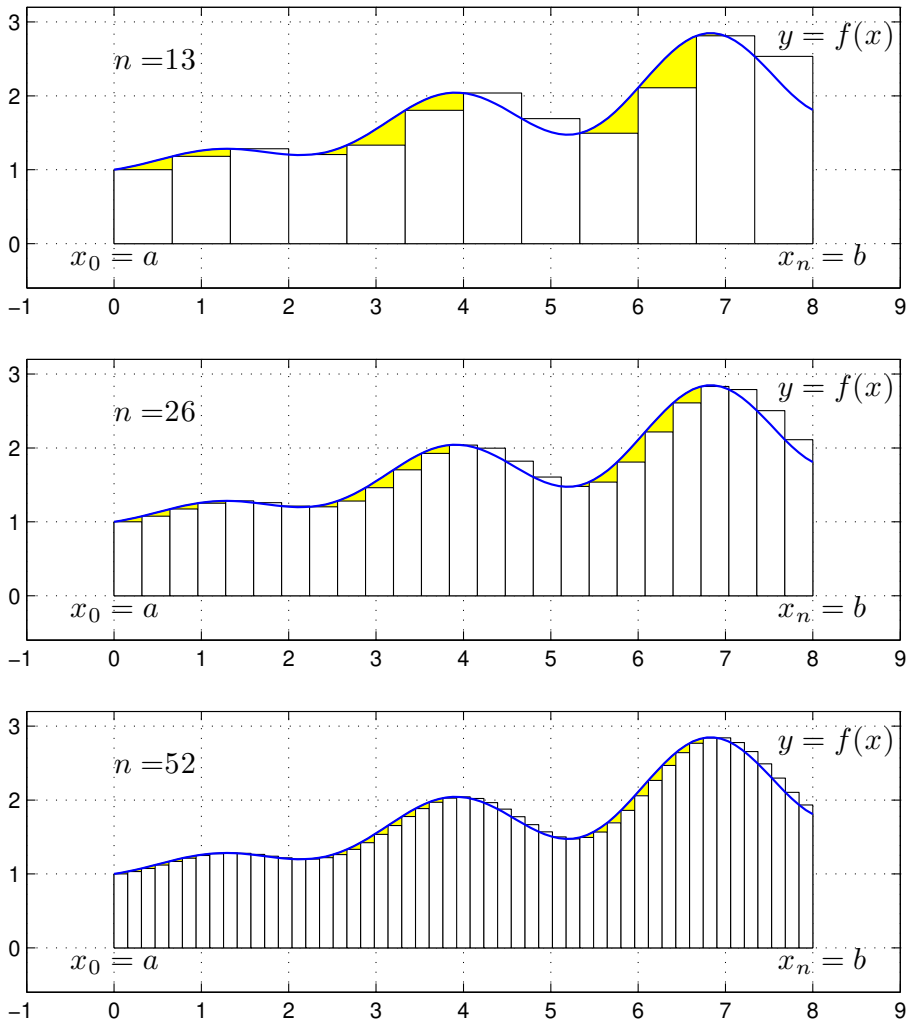
```
>> n=100;
>> a=0; b=1;
>> f=@(x)x.*sin(x);
>> x=linspace(a,b,n+1);
>> h=(b-a)/n;
>> q=sum(h*f(x(1:n)))
```

Detta sätt att organisera en beräkning kallas att vektorisera den, dvs. man genererar först en eller flera vektorer och utför sedan den önskade beräkningen på dem. De elementvisa operationerna `.*` `./` `.^` är exempel på vektoriserade operationer. Vi använde funktionen `sum` som snabbt summerar en vektor.

Uppgift 1. Beräkna en approximation av integralen $\int_0^1 x\,\sin(x)\,dx$ med vänster och höger rektangelregel samt mittpunkts- och trapetsmetoderna. Använd `sum`.

För metoderna ovan gäller att samtliga är konvergenta, dvs. låter vi antal delintervall n gå mot oändligheten så går approximationerna mot integralens värde.

Vi ser på några bilder för vänster rektangelregel där n blir allt större



Vi ser att vi allt bättre täcker upp ytan under grafen med allt fler och smalare staplar.

Nu räcker det i praktiken inte med konvergens. Vi måste få en bra approximation på en kort tid, dvs. inte behöva ta n alltför stort.

För vänster och höger rektangelregel gäller att om vi fördubblar antal delintervall så halveras felet i approximationen av integralen. För mittpunkts- och trapetsmetoderna gäller vid samma fördubbling att felet delas med fyra, dvs. mycket bättre utdelning.

3 Färdiga program i MATLAB

Det finns funktioner i MATLAB för att beräkna bestämda integraler både effektivt och noggrant, t.ex. finner vi `integral` som används enligt

`q=integral(fun,a,b)` `q=integral(fun,a,b,name,value)`

där `fun` är en funktion som beskriver integranden, `a` och `b` ger integrationsintervallet.

Genom att ge `name` som `'AbsTol'` eller `'RelTol'` kan vi ange önskad absolut respektive relativ noggrannhet i beräkningen och med `value` ger vi värdet på noggrannheten. Standardvärden är `1e-10` resp. `1e-6`, dvs. 1×10^{-10} resp. 1×10^{-6}.

Integranden skall beskrivas med elementvisa operationer, precis som om man skulle rita dess graf, `integral` kommer nämligen beräkna integranden för en vektor av x-värden.

Om vi skulle använda `integral` för att beräkna integralen $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$ så skulle det se ut så här

```
>> f=@(x)x.*sin(x);
>> a=0; b=1;
>> q=integral(f,a,b)
```

Uppgift 2. Beräkna arean av det slutna området mellan graferna till funktionerna

$$g(x) = \exp(-\frac{x^2}{2}) \quad \text{och} \quad h(x) = x^2 - 3x + 2\,.$$

Rita en bild av området. Använd `fzero` för att bestämma var graferna skär varandra och `integral` för integralberäkning.