Övningshjälp

Nedan finns tips och ledning till de rekommenderade övningarna. Jag har inte löst dem helt, utan tanken är att du ska fylla i det som saknas. (Jag har inte skrivit ut svaren, dem hittar du i läroboken). Det är viktigt att träna att räkna med penna och papper.

8.1: Längden av en graf till en funktion $f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$ ges av

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

8.1.9 Se exempel i första föreläsningen.

8.1.11 Längden av $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ på intervallet $1 \leq x \leq 2$. Dvs. bestäm $s = \int_1^2 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$

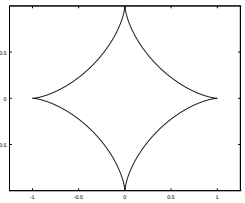
$y'(x) = \dots$
$1 + y'(x)^2 = \cdots = (x^2 + \frac{1}{4x^2})^2$
$s = \int_1^2 \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4x^2})^2} dx = \int_1^2 |x^2 + \frac{1}{4x^2}| dx =$ (integranden är positiv på intervallet $1 \leq x \leq 2$) $=$
$\int_1^2 x^2 + \frac{1}{4x^2} dx = \dots$

8.1.13 Längden av $y(x) = \frac{x^5}{6} + \frac{1}{10x^3}$ på intervallet $1 \leq x \leq 2$. Dvs. bestäm $s = \int_1^2 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$. (Lite samma lösningsprincip som i uppgift 8.11 ovan).

$y'(x) = \dots$
$1 + y'(x)^2 = \cdots = (\dots)^2$
$s = \int_1^2 \sqrt{(\dots)^2} dx = \dots$

8.1.33 Rita kurvan $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Kurvan kan parametriseras, $(x(t), y(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Matlabkoden nedan ritar figuren till höger.



```
t=linspace(0,2*pi);
x=cos(t).^3; y=sin(t).^3;
plot(x,y)
```

Kurvan är symmetrisk runt både x- och y-axeln. Så vi kan räkna längden på en av delsträckorna och multiplicera med 4, dvs. $s = 4\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)} dx$ där $f(x)$ ges av

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \Leftrightarrow y^{2/3} = 1 - x^{2/3} \Rightarrow y = f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$$

Så

$f'(x) = \dots$
$1 + f'(x)^2 = \dots$
$\sqrt{1 + f'(x)^2} = x^{-1/3}$
$s = 4\int_0^1 \dots$

8.1.35 $y(x) = 2x^{3/2}$. Bestäm ett uttyck för längden på kurvan som börjar i $(1, 2)$ ($y(1) = 2$). Dvs. bestäm $s(t) = \int_1^t \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$

$$y'(x) =$$
$$1 + y'(x)^2 =$$
$$\sqrt{1 + y'(x)^2} =$$
$$s(t) = \cdots = \frac{2}{27}((1 + 9t)^{3/2} - 10\sqrt{10})$$

8.1.43 Vi ska beräkna längden av $y(x) = 2\sin(\frac{2\pi}{30}x) = 2\sin(\frac{\pi}{15}x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 60$. Formulera integralen och använd `integral`-kommandot i Matlab för att lösa den.

8.2 Rotationsvolym V och mantelarea S vid rotation av en funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$ runt x-axeln:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$
$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Rotationsvolym V och mantelarea S vid rotation av en funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$ runt y-axeln:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$
$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

8.2.1 $y(x) = \tan(x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ Rotera runt x-axel respektive y-axel och beräkna mantelarean. Ställ upp integralerna och använd Matlab för att beräkna mantelareorna.
($y'(x) = 1/\cos^2(x) = \sec^2(x)$)

8.2.7 Rotera $y(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 2$ runt x-axeln och beräkna mantelarean. Dvs. ställ upp integralen och lös den analytiskt (exakt med papper och penna). Jämför med exempel från föreläsningen.

8.2.9 Bestäm mantelarea då $y^2 = x + 1$, $0 \leq x \leq 3$ roterar runt x-axeln.

$$y^2(x) = x + 1 \Rightarrow y(x) = \sqrt{1 + x}$$

Observera att vi har $0 \leq x \leq 3$ och $1 \leq y(x) \leq 2$ på intervallet. Så

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + y'(x)^2}dx = 2\pi \int_0^3 ...$$

(Lös integralen med variabelsubstitution).

8.2.27 $y(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ roterar runt x-axeln. Bestäm mantelarean, $S = 2\pi \int_1^\infty |y(x)|\sqrt{1 + y'(x)^2}dx$

$$S = 2\pi \int_1^\infty |y(x)|\sqrt{1 + y'(x)^2}dx = \cdots = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3}dx$$

Vi har att att $\sqrt{x^4 + 1} > \sqrt{x^4} = x^2$ så

$$2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3}dx > 2\pi \int_1^\infty \frac{x^2}{x^3}dx = \ldots \quad \text{som ju divergerar.}$$

Uppgift 3 från Exempelduggan på kurshemsidan: Beräkna arean S av ytan som uppstår när kurvan

$$y = \frac{1}{3}x^3, 1 \leq x \leq 2$$

roteras runt x-axeln. (Duggan finns löst på kurshemsidan.).