Övningshjälp

Nedan finns tips och ledning till de rekommenderade övningarna. Jag har inte löst dem helt, utan tanken är att du ska fylla i det som saknas. (Jag har inte skrivit ut svaren, dem hittar du i läroboken). Det är viktigt att träna att räkna med penna och papper.

9.3: En separabel differentialekvation kan skrivas på formen

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

För att få fram lösningarna till ekvationen integrerar man vänster- och högerled. Lösningarna ges av

$$H(y(x)) = G(x) + C, \text{ där } C \text{ är en konstant}$$

9.3.1 $y'(x) = 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{1}{y(x)^2}y'(x) = 3x^2$, $y(x) \neq 0$. Bestäm $H(y(x))$ och $G(x)$ genom att integrera $\frac{1}{y(x)^2}$ m.a.p. y och $3x^2$ m.a.p. x. Lös ut $y(x)$, kontrollera också lösningen $y(x) = 0$. (Det finns ett liknande exempel i föreläsningsanteckningarna.)

9.3.5 $(e^{y(x)} - 1)y'(x) = 2 + \cos(x)$. Det går bara att bestämma $y(x)$ implicit.

9.3.11 $y'(x) = xe^y, y(0) = 0$. Bestäm $y(x)$ på vanligt sätt (identifiera $h(y(x))$, $g(x)$ och integrera h m.a.p. y och g m.a.p. x.). Använd villkoret $y(0) = 0$ för att bestämma konstanten C i lösningen.

9.3.13 Samma lösningsgång som i 9.3.11

9.3.15 $x\ln(x) = y(x)(1 + \sqrt{3 + y(x)^2})y'(x)$, $y(1) = 1$. Samma lösningsgång som i 9.3.11. (Använd förslagsvis partiell integrering för att bestämma $\int x\ln(x)dx$)

Differentialekvationer används ofta för att modellera/beskriva olika fenomen över tid. Differentialekvationerna i uppgifterna nedan är alla exempel på det. (Alla sambanden är exempel på separabla differentialekvationer - och löses genom att man utnyttjar derivatan av en sammansatt funktion, enligt ovan).

9.3.37 Övning 9.2.27: $5 \cdot Q'(t) + \frac{1}{0.05} \cdot Q(t) = 60 \Leftrightarrow Q'(t) = 12 - 4Q(t)$, så vi ska lösa

$$\frac{1}{12 - 4Q(t)}Q'(t) = 1 \text{ , med } Q(0) = 0$$

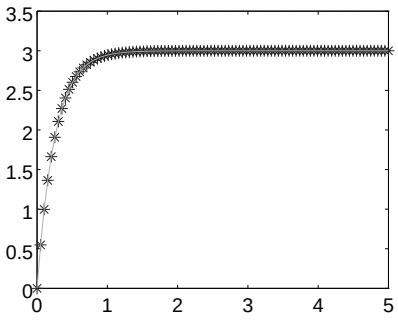
och sedan beräkna gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} Q(t)$.

Vi får $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$ (genomför beräkningarna), och $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 3$

Matlabkoden nedan ritar grafen för $Q(t)$ på intervallet $0 \leq t \leq 5$. De tre sista raderna i exemplet löser differentialekvationen numeriskt med kommandot `ode45` och markerar den numeriska lösningen med * i figuren. (Kommandot `ode45` används i senare laborationer i kursen).

```
Q=@(t)3-3*exp(-4*t);
t=linspace(0,5);
plot(t,Q(t)); hold on

f=@(t,u)12-4*u;
[t,U]=ode45(f,[0,5],0);
plot(t,U,'*'); hold on;
```



9.3.39 $P'(t) = k(M - P(t))$, $k > 0$ och M konstanter. Vi kan göra omskrivningen

$$\frac{1}{P(t) - M} P'(t) = -k$$

Bestäm $P(t)$. Det är rimligt att anta att $P(0) = 0$, så använd dig av det när du bestämmer värdet på konstanten i lösningen och beräknar gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

9.3.43 Koncentrationen $C(t)$ i tiden t ges av sambandet $C'(t) = r - k \cdot C(t)$, r och k konstanter.

(a) Vi har $\dfrac{1}{k \cdot C(t) - r} C'(t) = -1$. Lös differentialekvationen.

Vi får (genomför beräkningarna) $C(t) = Ke^{-kt} + \dfrac{r}{k}$, där K är en konstant.

Låt startkoncentrationen $C(0) = C_0$. Bestäm konstanten K. Vi får (genomför beräkningarna) $K = C_0 - \dfrac{r}{k}$

9.3.45 Saltkoncentrationen $y(t)$ i tanken ges av differentialekvationen $y'(t) = -\dfrac{y(t)}{100}$, $y(0) = 15$

(a) Vi har $\dfrac{1}{y(x)} y'(t) = -\dfrac{1}{100}$, $y(0) = 15$. Bestäm $y(t)$

(b) Beräkna $y(20)$

9.3.47 $y(t)$ är mängden alkohol efter t minuter.

· Mängden alkohol efter 0 minuter $y(0) = 0.04 \cdot 2000 = 80$.

· Förändringen av alkoholmängden (mängd in - mängd ut):

$$y'(t) = 0.06 \cdot 20 - \frac{y(t)}{2000} \cdot 20 = \frac{120 - y(t)}{100}$$

Vi har sambandet $y'(t) = \dfrac{120 - y(t)}{100}$, $y(0) = 0.04 \cdot 2000 = 80$ och vill bestämma $y(60)$. Så

$$\frac{1}{120 - y(x)} y'(t) = \frac{1}{100}$$

Ger oss lösningarna

$$-\ln|120 - y| = \frac{1}{100} t + C$$

$y(0) = 80$ ger $-\ln|120 - 80| = 0 + C$, dvs $C = -\ln(40)$. För att kunna bestämma $y(60)$ behöver vi formulera lösningen $y(t)$ explicit, dvs vi behöver lösa ut $y(t)$ ur sambandet

$$-\ln|120 - y(t)| = \frac{1}{100} t - \ln(40)$$

Vi kan skriva om sambandet till (genomför gärna beräkningarna själva, det är ganska många steg)

$$|120 - y(t)| = 40e^{-t/100}$$

Högerledet är alltid positivt, så vi kan ta bort absolutbeloppet och lösa ut $y(t)$, vi får $y(t) = 120 - 40e^{-t/100}$. Så $y(60) = 120 - 40^{-60/100} \approx 98.05$, Svar: Efter en timme är det ca $\frac{98.05}{2000} \cdot 100 \approx 4.9\%$ alkohol.

9.3.49 Lös $v'(t) = g - k \cdot v(t)$, där $k > 0$ konstant och $g = 9.81$ tyngdkraftsaccelerationen.