Övningshjälp

Nedan finns tips och ledning till de rekommenderade övningarna. Jag har inte löst dem helt, utan tanken är att du ska fylla i det som saknas. (Jag har inte skrivit ut svaren, dem hittar du i läroboken). Det är viktigt att träna att räkna med penna och papper.

9.5: Första ordningens linjär differentialekvation:

$$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$$

$g(x)$ och $h(x)$ kontinuerliga funktioner.

Lös dem med integererande faktor:

1: Bestäm primitiv funktion $G(x)$ till $g(x)$ och bilda $e^{G(x)}$

2: Bestäm primitiv funktion till $(y(x) \cdot e^{G(x)})'$ och lös ut $y(x)$

9.5.1 Differentialekvationen $y'(x) + x\sqrt{y(x)} = x^2$ är inte linjär. Termen $\sqrt{y(x)}$ gör att $y(x)$ inte förekommer linjärt i sambandet.

9.5.3 $u(t)e^t = t + \sqrt{t}u'(t)$. Skriv om till $u'(t) - \dfrac{e^t}{\sqrt{t}} \cdot u(t) = -\sqrt{t}$. Identifiera $g(t)$ och $h(t)$

9.5.5 $x \cdot y'(x) - 2y(x) = x^2 \Rightarrow y'(x) - \dfrac{2}{x}y(x) = x$, $(x \neq 0)$. $g(x) = -\dfrac{x}{2} \Rightarrow G(x) = \ldots$. Bestäm primitiv funktion till $(y(x) \cdot e^{G(x)})'$ och lös ut $y(x)$

9.5.9 $y'(x)\sin(x) + y(x)\cos(x) = \sin(x^2)$. Utnyttja att $(y(x)\sin(x))' = y'(x)\sin(x) + y(x)\cos(x)$

9.5.13 $t^2 \cdot y'(t) + 3t \cdot y(t) = \sqrt{1+t^2}, t > 0$. Dela alla termer med t^2, identifiera $g(t)$, bestäm $G(t)$, bestäm primitiv funktion till $(y(t) \cdot e^{G(t)})'$ och lös ut $y(t)$.

9.5.15 $x^2 \cdot y'(x) + 2x \cdot y(x) = \ln(x) \Rightarrow (\ldots)' = \ln(x) \Rightarrow (\ldots) = \int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx =$ [Partiell integrering] $= \ldots$. Lös ut y, vi får $y(x) = \ldots$
Använd vilkoret $y(1) = 2$ för att bestämma ett värde på konstanten C i lösningen.

9.5.17 $t \cdot u'(t) = t^2 + 3u(t) \Rightarrow u'(t) - \dfrac{3}{t}u(t) = t^2$. Lös, förslagsvis med integrerande faktor enligt ovan, vi får $u(t) = -t^2 + Ct^3$. Använd $u(2) = 4$ och bestäm värdet på konstanten.

9.5.19 $y' - \dfrac{1}{x}y(x) = x\sin(x)$.

Differentialekvationer används ofta för att modellera/beskriva olika fenomen över tid. Differentialekvationerna i uppgifterna nedan är alla exempel på det. (Alla sambanden är exempel på första ordningens linjära differentialekvationer - och löses förslagsvis genom att man utnyttjar metoden med integrerande faktor ovan).

9.5.27 $2I'(t) + 20I(t) = 40 \Rightarrow I'(t) + 5I(t) = 20$.

9.5.33 $y'(t) =$Salt in - Salt ut $= 2 - \dfrac{3y(t)}{100+2t}$ Så $y'(t) + (\dfrac{3}{100+2t})y(t) = 2$. Vi får $G(t) = \cdots = (100+2t)^{3/2}$ och $(y(t) \cdot e^{G(x)})' = \cdots \Rightarrow y(t) \cdot e^{G(t)} = \int \cdots \Rightarrow$ $y(t) = 2/5(100+2t) + C(100+2t)^{-3/2}$. Vi har $y(0) = 0$ så $C = -40$ och $y(20) = 2/5(100+40) - 40(100+40)^{-3/2} \approx 55.9755.9766$. Koncentrationen $C(t) = \dfrac{y(t)}{100+2t}$ och $C(20) \approx 0.39983$

9.5.35 (a) $v'(t) + \dfrac{c}{m}v(t) = g$. Vi har $G(t) = e^{(c/m)t}$ och $(v(t)e^{G(t)})' = \ldots$. Vi får $v(t)e^{G(t)} = \ldots$, vilket ger oss $v(t) = mg/c + Ke^{-(c/m)t}$ där K är en konstant. Villkoret $v(0) = 0$ ger att $K = -mg/c$ dvs $v(t) = \dfrac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$

(b) $\lim_{t\to\infty} v(t) = mg/c$

(c) $\int v(t)dt = \ldots$

9.5.37 (a) $z = 1/P \Rightarrow P = 1/z$ och $P' = -z'/z^2$. Vi får

$$P' = kP(1 - P/M) \Rightarrow -z'/z^2 = k\frac{1}{z}(1 - \frac{1}{zM}) = \ldots$$

(b) Lös $z' + kz = k/M$, förslagsvis med integrerande faktor enligt ovan. Detta ger $z = 1/M + Ce^{-kt}$. Låt $P = 1/z$, dvs

$$P = \frac{1}{1/M + Ce^{-kt}} = \ldots$$

Slutligen en av uppgifterna på exempelduggan är första ordningens linjär differentialekvation. Du hittar uppgiften och lösningen på kurshemsidan

Beräkna lösningen till differentialekvationen

$$y' + 2xy = x, x > 0$$
$$y(0) = 1$$