

6 Matriser

6.1 Definition och räkneregler

Def. 6.1 Som matris betecknar vi ett rektangulärt schema av tal. $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ står för en matris med n rader och m kolonner, där alla element a_{ij} (läs: rad i , kolonn j) är reella tal och $n, m \in \mathbb{N}$.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$

OBS.:

- Vi identifierar $1 \times n$ matriser med radvektorer $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ och $n \times 1$ matriser med kolonnvektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
- Vi kommer ha stor nytta av att sammanfatta matris element i rader/kolonner, dvs. att skriva $A = \begin{pmatrix} -\vec{v}_1- \\ \vdots \\ -\vec{v}_n- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_m \\ | & | \end{pmatrix}$, där $\vec{v}_i$ står för A 's rad nummer i , $\vec{a}_j$ för kolonn j .

Addition och multiplikation av matriser

När en matris ska adderas till eller subtraheras från en annan matris, samt när den ska multipliceras med ett reellt tal, sker detta elementvis.

Vid addition/subtraktion är det då nödvändigt att både matriser har samma form:

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+0 & 1+1 \\ 3+2 & 1+3 \\ 4+4 & -1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad A + C = \text{ej definierad}, \quad 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Eftersom dessa operationer utförs elementvis gäller alla räkneregler man skulle kunna förvänta sig: För $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gäller

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \end{aligned}$$

(addition är både kommutativ och associativ)

$$\begin{aligned} \alpha(A + B) &= \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \\ (\alpha + \beta) \cdot A &= \alpha \cdot A + \beta \cdot A \\ \alpha \cdot (\beta \cdot A) &= (\alpha \beta) \cdot A \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{multiplikation med reella tal är distributiv både i} \\ \text{tal och i matris "faktorn"} \end{array} \right.$
multiplikation med reella tal är associativ

OBS.: För matriser $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ brukar man skriva $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ eller kortare $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ (när ingen missförstånd av dimensionerna befäras) där a_{ij} avser (som ovan) elementet i rad i och kolonn j .

$A = B$ gäller då när dimensionerna är samma och likheten är uppfyllt elementvis, dvs. $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

$A \neq B \Leftrightarrow$ har ej samma form eller $a_{ij} \neq b_{ij}$ för minst ett par (i, j) .

Multiplikation av matriser

När matriser multipliceras sker detta inte elementvis (för den enkla anledningen att produkten som definierad nedan är mycket mer användbar).

Def. 6.2 För två matriser $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ och $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$ är produkten AB bara definierad om $m = p$ och ges då av $AB = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, där element $c_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{b}_j$ är skalärprodukten av rad i av första matrisen med kolumn j av andra:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} - & \vec{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{v}_n & - \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_q \\ | & & | \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{v}_1 \cdot \vec{b}_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{v}_n \cdot \vec{b}_1 & \vec{v}_n \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{v}_n \cdot \vec{b}_q \end{pmatrix}}_{AB \in \mathbb{R}^{n \times q}}$$

Uppenbartligen behöves vi att raderna av A har lika många element som kolumnerna av B , alltså $m = p$, för att kunna beräkna skalärprodukter.

Ex.: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 3 & 12 & 3 \end{pmatrix}$

OBS.: • Produkten av en $n \times m$ och en $m \times q$ matris blir alltså av form $n \times q$.
• Exemplet ovan är AB definierad, men BA inte!

Ex.: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$AB = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBS.: • Även för kvadratiska matriser (där både AB och BA är definierade) är multiplikationen i allmänhet inte kommutativ!

- Låt $\mathbf{0}$ beteckna nollmatrisen (alla element lika med 0). Med $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gäller $B\mathbf{0} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{0}A = \mathbf{0}$.

Den vanliga ekvivalensen $ba = ba' \Leftrightarrow a = a'$ (om $b \neq 0$, en självklarhet för reella tal) gäller alltså inte för matriser! Dessutom kan vi få att $BA = \mathbf{0}$ trots att $A \neq \mathbf{0}$ och $B \neq \mathbf{0}$.

Ett någorlunda uppenbart men mycket användbart resultat är följande sats som säger att kolonnerna i AB är linjärkombinationer av kolonnerna i A :

Sats 6.1 Låt $A = \begin{pmatrix} -\vec{v}_1- \\ \vdots \\ -\vec{v}_n- \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ och $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_q \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times q}$.
 Då gäller
 $AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ A\vec{b}_1 & \dots & A\vec{b}_q \\ | & & | \end{pmatrix}$. Kolonn i i produktmatrisen AB
 ges alltså av $A\vec{b}_i = b_{i1} \cdot \vec{a}_1 + b_{i2} \cdot \vec{a}_2 + \dots + b_{in} \cdot \vec{a}_n$, där $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

Beris: Följer direkt ur def. av matris multiplikation.

OBS: Snarliket gäller $AB = \begin{pmatrix} -\vec{v}_1 B- \\ \vdots \\ -\vec{v}_n B- \end{pmatrix}$ för raderna. Beris återigen omedelbart ur definitionen.

Om B är en kolonnvektor alltså en matris av form $n \times 1$ ger satsen ovan:

Sats 6.2 För $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ och $B = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ gäller
 $A\vec{v} = v_1 \vec{a}_1 + v_2 \vec{a}_2 + \dots + v_m \vec{a}_m$

Trots att matrismultiplikation inte är kommutativ är den både distributiv och associativ, dvs. för matriser A, B, C så att produkterna är definierade gäller

- (i) $(A+B)C = AC + BC$
- (ii) $A(B+C) = AB + AC$
- (iii) $(AB)C = A(BC)$

OBS: Då matrismultiplikationen inte är kommutativ, är distributivitet från vänster (i) och höger (ii) inte ekvivalenta!

Beris: Låt $\vec{u}_i$ och $\vec{v}_i$ vara raderna i A resp. B , dvs. $A = \begin{pmatrix} -\vec{u}_1- \\ \vdots \\ -\vec{u}_n- \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -\vec{v}_1- \\ \vdots \\ -\vec{v}_m- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$,
 samt $C = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_k \\ | & & | \end{pmatrix}$, alltså $\vec{b}_j, \vec{c}_j$ betecknar kolonn j i matrisen B resp. C .

(i) Om vi tittar på en godtycklig position, låt säga rad i , kolonn j , så står det till höger en skalärprodukt av $(\vec{u}_i + \vec{v}_i)$ med $\vec{c}_j$ och till höger summan av $\vec{u}_i \circ \vec{c}_j$ och $\vec{v}_i \circ \vec{c}_j$. Dessa är uppenbarligen lika.

(ii) På samma vis står i position (i, j) på vänster sidan $\vec{u}_i \circ (\vec{b}_j + \vec{c}_j)$, på höger sidan $\vec{u}_i \circ \vec{b}_j + \vec{u}_i \circ \vec{c}_j$.

(iii) Enligt Sats 6.1 ges kolonn j av matrisen $(AB)C$ av $(AB)\vec{c}_j = \begin{pmatrix} | & & | \\ A\vec{b}_1 & \dots & A\vec{b}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \vec{c}_j$
 $\stackrel{\text{Sats 6.2}}{=} c_{1j} A\vec{b}_1 + \dots + c_{nj} A\vec{b}_n$. På samma sätt är kolonn j i BC lika med $B\vec{c}_j$ och därför kolonn j i $A(BC)$ enligt Sats 6.1 lika med $A(B\vec{c}_j) \stackrel{\text{Sats 6.2}}{=} A(c_{1j} \vec{b}_1 + \dots + c_{nj} \vec{b}_n) \stackrel{(2) \text{ härunder}}{=} c_{1j} A\vec{b}_1 + \dots + c_{nj} A\vec{b}_n$. $\square$

OBS: För reella tal α, β och matriser A, B, C gäller vidare

- (1) $\alpha \cdot (AB) = (\alpha \cdot A)B = A(\alpha \cdot B)$
- (2) $C(\alpha A + \beta B) = \alpha CA + \beta CB$

[Beris: (1) direkt ur Def. 6.2, (2) ur (ii) ovan och (1) här.]

Dvs: Multipliceras man en matris med ett multipl av en raden eller en linjärkombination är produkten ett multipl eller linjärkombination av produkterna.

Högtravande: Matrismultiplikation är en linjär operation.

Transponering

Def. 6.3 • För $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \dots & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ kallas matrisen $\begin{pmatrix} -\bar{a}_1- \\ \vdots \\ -\bar{a}_m- \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ transponerat av A och betecknas med A^T .

- En matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas kvadratisk. Om det gäller $A = A^T$ kallas A symmetrisk.
- En matris $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, där $d_{ij} = 0$ för alla $i \neq j$ (alla element utanför diagonalen är 0), kallas diagonalmatris.

Ex: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = C$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

OBS: • en diagonalmatris är symmetrisk, en symmetrisk matris nödvändigtvis kvadratisk.

- transponerat av en radvektor blir en kolonnvektor; vi kan alltså för två radvektorer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ skriva skalärprodukten med hjälp av matrismultiplikationen som $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{u} \vec{v}^T = (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$
- $\vec{u}^T \vec{v}$ blir däremot en $n \times n$ matris $\vec{u}^T \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \dots v_n) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix}$

För transponering gäller följande räkneregler:

- (1) $(A^T)^T = A$
- (2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
- (3) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$

Beris: (1) direkt ur Def. 6.3

(2) och (3) direkt ur Def. 6.3 då summa och multipel av matriser beräknas elementvis.

(4) Vi tittar på element i rad i och kolonn j , kort element (i,j) av båda $(AB)^T$ och $B^T A^T$.

Element (i,j) av $(AB)^T$ är element (j,i) i matrisen AB och den ges av skalärprodukten av rad j i A och kolonn i i B .

Element (i,j) av $B^T A^T$ ges som skalärprodukt av rad i i B^T och kolonn j i A^T .
Därför att rad i i B^T är kolonn i i B och kolonn j i A^T är rad j i matrisen A är dessa skalärprodukter samma.

Anm.: • $(A A^T)^T \stackrel{(4)}{=} (A^T)^T A^T \stackrel{(1)}{=} A A^T$, dvs. $A A^T$ är alltid en symmetrisk matris.

• Upprepar man (4) fås $(A_1 \dots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \dots A_2^T A_1^T$.