

5 Linjära ekvationssystem

Är kanske det mest centrala avsnittet i denna kurs:
relaterar bland annat till diff.ekvationer, vektorer, geometri och matriser.

5.1 Gausselimination

Def. 5.1 En ekvation kallas **linjär**, om alla termer som dyker upp är konstanta multipler av obekanta eller av 1. Man brukar skriva $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = c$, där x_i är variabler (obekanta) och a_i, c givna (reella) tal. [obekanta till vänster, konstanten till höger]

Flera linjära ekvationer som ska uppfyllas av samma uppsättning värden för de obekanta $x_1, \dots, x_n$ kallas ett **linjärt ekvationssystem**. Om högerledet i alla ekvationer är lika med 0 pratar man om ett **homogent** ekvationssystem.

Lösningar är alla uppsättningar $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ som gör att systemets alla ekvationer är uppfyllda samtidigt!

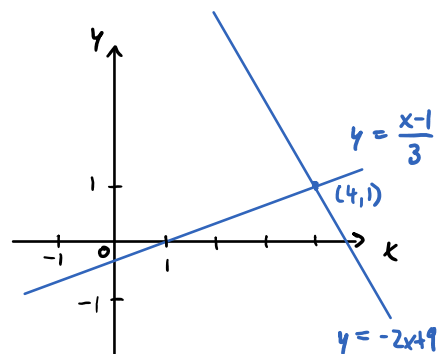
Ex.: $5x = 3$, $2x + 4y = 0$, $4x^2 + z = 2$, $xy + z = 3$, $3x_1 + 2x_2 + \sqrt{2}x_3 - 5x_4 = \pi$
 $x_1 + \sqrt{x_2} - x_3 = 0$, $\sin(x_1 + x_2) = 5$, $|x_1 + x_2| = 4$

OBS.: Vi lärde oss att en linjär ekvation i två obekanta kan tolkas som linje i $\mathbb{R}^2$, en linjär ekvation i tre obekanta som plan i $\mathbb{R}^3$.

Ex.: Hitta alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + 3y$$

stoppar man första relationen mellan x och y in i andra ekvationen får $2(1 + 3y) + y = 9 \Leftrightarrow y = 1$
Alltså är den enda lösningen $(x, y) = (4, 1)$



Framåt elimination

Strategin vi använde ovan (lösa ut, sätta in) blir omedelbart ganska besvärlig när antalet obekanta (eller ekvationer) ökar. Ett mer systematiskt sätt att gå tillväga som funkar oavsett systemets storlek bygger på följande ekvivalensomformningar (dvs. som bevarar lösningsmängden):

- 1) Byta plats på ekvationer (eller obekanta).
- 2) Multiplicera en ekvation med ett tal $\neq 0$.
- 3) Addera en ekvation till en annan.

Mål: att omforma ekvationssystemet till så-kallad trappstegsform utan att förändra lösningsmängden.

Ex.: $\begin{cases} x - 3y = 1 & (a) \\ 2x + y = 9 & (b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 & (a) \\ -x - \frac{1}{2}y = -\frac{9}{2} & (b') = -\frac{1}{2}(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 & (a) \\ -\frac{7}{2}y = -\frac{7}{2} & (b'') = (a) + (b') \end{cases}$
 $\Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1 + 3y = 4$

OBS: Gör inte för många steg på en gång!

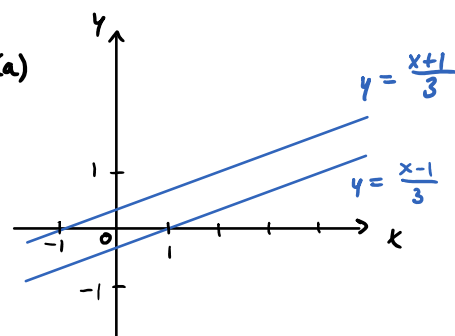
Om man till exempel ersätter (a) med $(a') = (a) + (b)$ och (b) med $(b') = (a) + (b)$ är lösningsmängden i allmänhet inte samma längre!

$$\begin{cases} 3x - 2y = 10 & (a') \\ 3x - 2y = 10 & (b') \end{cases}$$

uppfylls också av paret $(x, y) = (2, -2)$ t.ex. som det ursprungliga ekvationssystemet inte gjorde!

Ex.: Lös $\begin{cases} x - 3y = 1 & (a) \\ -2x + 6y = 2 & (b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 & (a) \\ 0 = 4 & (b') = (b) + 2(a) \end{cases}$

Det här systemet saknar lösning.



• Lös $\begin{cases} x - 3y = 1 & (a) \\ -2x + 6y = -2 & (b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 & (a) \\ 0 = 0 & (b') = (b) + 2(a) \end{cases}$

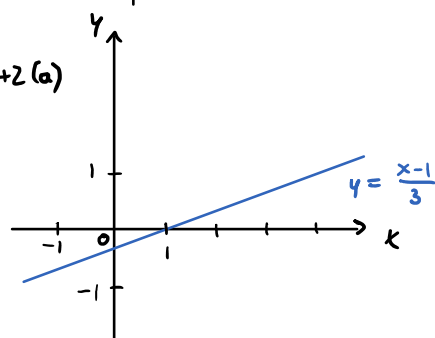
Det betyder att vi "skär" två identiska linjer.

Sätt $x = t \Rightarrow y = \frac{t-1}{3}$

Dvs. alla par $(x, y) = \left(t, \frac{t-1}{3}\right), t \in \mathbb{R}$

löser vårt ekv. system.

$$= \left(0, -\frac{1}{3}\right) + t \left(1, \frac{1}{3}\right), t \in \mathbb{R}$$



OBS: Precis som två linjer i $\mathbb{R}^2$ kan skäras, vara parallella eller identiska kan ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta ha en entydig lösning, sakna lösning eller ha oändligt många lösningar

(utökad) Matrixnotation

Ex.: Lös $\begin{cases} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 3 & (a) \\ -2x + 3y + 4z = 0 & (b) \\ 3x - 1 \cdot y - 2z = 5 & (c) \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 \\ 3 & -1 & -2 & | & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & 6 & | & 6 \\ 0 & -4 & -5 & | & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b') = (b) + 2(a) \\ (c') = (c) - 3(a) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & 6 & | & 6 \\ 0 & 0 & -1 & | & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b') \\ (c'') = 5(c') + 4(b') \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -4 \\ 5y + 6(-4) = 6 \Leftrightarrow y = 6 \\ x + 6 + (-4) = 3 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (1, 6, -4)$$

alltså har vi en entydig lösning.

Ex: Lös

$$\begin{cases} y - 3z = 4 & (a) \\ 2x - y + 4z = -1 & (b) \\ 2x + y - 2z = 4 & (c) \end{cases}$$

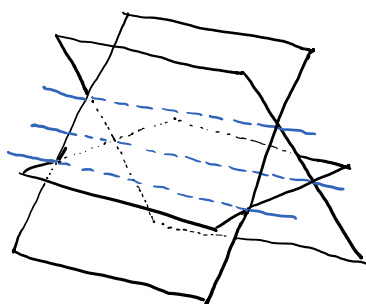
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right] \begin{matrix} (b) \\ (c) \\ (a) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right] \begin{matrix} (b) \\ (c') = (c) - (b) \\ (a) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \begin{matrix} (b) \\ (a) \\ (c'') = (c') - 2(a) \end{matrix}$$

$$(c''): 0 = -3 \quad \downarrow$$

$\Rightarrow$ Lösning saknas



parallela skärlinjer

Lös

$$\begin{cases} y - 3z = 4 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ 2x + y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} (b) \\ (a) \\ (c'') = (c) - 2(a) \end{matrix}$$

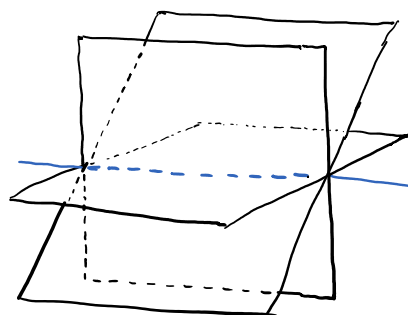
z kan väljas: $z = t$

$$y = 4 + 3z = 4 + 3t$$

$$x = \frac{1}{2}(-1 + y - 4z) = \frac{1}{2}(-1 + 4 + 3t - 4t) = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$$

Alla tupel $(x, y, z) = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, 4 + 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, löser systemet.

$(x, y, z) = (\frac{3}{2}, 4, 0) + t(-\frac{1}{2}, 3, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ är faktiskt parametriseringen på en linje!



identiska skärlinjer

Anmärkning: I ett kvadratisk ekvationssystem (lika många obekanta som equationer, alltså frihetsgrader som villkor) är "normalfallet" att vi får en entydig lösning. Det kan dock hända att vi har inga eller oändligt många lösningar.

Teori kring Gausselimination

- Lemma 5.1** (i) $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ är en lösning till ekvation (a) då och endast då det är en lösning till $c \cdot (a)$ (dvs. ekvationen som uppstår när båda sidor gångeras med c) för godtyckligt $c \neq 0$.
- (ii) $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ är en lösning till ekvationerna (a) och (b) då och endast då den löser (a) och $(b') = (a) + (b)$

Beris:

(i) $\vec{x}$ uppfyller $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = k$ (a)
 $\Rightarrow c a_1 x_1 + \dots + c a_n x_n = c \cdot k$ $c \cdot (a)$ $\forall c \in \mathbb{R}$
 $\Leftarrow$ bara för $c \neq 0$ (för vi behöver dela med c) $\Leftarrow$.

(ii) " $\Rightarrow$ " $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = k_1$ (a) och $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = k_2$ (b)
 $\Rightarrow (a_1 + b_1) x_1 + \dots + (a_n + b_n) x_n = k_1 + k_2$ $(b') = (a) + (b)$ är också uppfyllt.

" $\Leftarrow$ " Om $\vec{x}$ uppfyller $(b') = (a) + (b)$ och (a) så kan jag subtrahera vänsterled av (a) från vänsterled av (b') och samman med högerleden och får att $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = k_2$ (b), alltså måste (b) också lösas av $\vec{x}$.

OBS: (ii) kan användas upprepat för att se att det gäller också när (b) ersätts av en summa av fler än två ekvationer (där (b) ingår!).

Sats 5.1 Vid Gausselimination bevaras ett ekv.systems lösningsmängd.

Beris: Följer direkt ur Lemma 5.1 (och att byta plats på två ekvationer ändras inte lösningsmängden).

Lemma 5.2 Om $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ och $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ är lösningar till ett linjärt ekvationssystem, så är alla kombinationer $\vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ (där $t \in \mathbb{R}$) också det.

[OBS: $l: \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ är linjen genom punkterna $P_1: (a_1, \dots, a_n)$ och $P_2: (b_1, \dots, b_n)$.]

Beris: Vi tar en ekvation $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = k$
och om både $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är en lösning till systemet så måste det gälla $c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = k$ (a) och $c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = k$ (b)
 $\Rightarrow (1-t)(a) + t(b): (1-t)(c_1 a_1 + \dots + c_n a_n) + t(c_1 b_1 + \dots + c_n b_n) = (1-t)k + t \cdot k$ gäller.
 $c_1[(1-t)a_1 + t b_1] + \dots + c_n[(1-t)a_n + t b_n] = k$
 $\Rightarrow ((1-t)a_1 + t b_1, (1-t)a_2 + t b_2, \dots, (1-t)a_n + t b_n) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ är också en lösning. $\square$

OBS: Lemma 5.2 säger att multiplik av lösningar är också lösningar för homogena system.

Sats 5.2 (i) Ett linjärt ekvationssystem har antingen ingen, en entydig eller oändligt många lösningar.
(ii) Ett homogent linjärt ekv.system har antingen bara den triviala lösningen $(0, 0, \dots, 0)$ eller oändligt många lösningar.

Beris: (i) an det finns ingen eller exakt en lösning finns ingenting att visa.
Om det finns två olika lösningar, $\vec{a}$ och $\vec{b}$, så säger Lemma 5.2 att det finns oändligt många.
(ii) homogent betyder att alla högerled är lika med 0. $\Rightarrow \vec{0} = (0, \dots, 0)$ löser systemet. $\square$