

5.2 Kvadratiske, under- och överbestämde system

Def. 5.2 Ett linjärt ekvationssystem med m ekvationer (# villkor) och n obekanta (# frihetsgrader), för några $m, n \in \mathbb{N}$, kallas

- **kvadratisk** om $m = n$
- **underbestämt** om $m < n$ och
- **överbestämt** om $m > n$.

När vi har kommit fram till trappstegsformen med hjälp av Gauss-(framåt)elimination står vissa obekanta vid ett trappsteg, dessa kallas **pivåvariabler**. Alla andra kan sättas som egna parametrar och kallas därför **fria variabler**.

Om eliminationen leder till en (eller flera) ekvation(er) av formen $0 = C$, för något $C \neq 0$, kallas chv. systemet för **motsägsfullt**.

- OBS.:
- Uppenbarligen är antalet fria + antalet pivåvariabler lika med n , antalet obekanta.
 - Om i ett kvadratisk elv. system alla variabler är pivåvariabler kan det inte vara motsägsfullt och har en entydig lösning (ätersubstitution).
 - Vilka obekanta som är fria och vilka som är pivåvariabler beror på eliminationsprocessen, men inte antalet! (och inte heller lösningsmängden, jfr. Sats 5.1)
 - "Normalfallet" är att ett kvadratisk system har en entydig lösning, ett underbestämt system oändligt många och ett överbestämt system saknar lösning, men det är ingen generell regel (bara trappstegsformen avstöjar vilket som gäller!).

Exempel: 1) Lös $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ 3 obekanta, 2 ekvationer $\rightarrow$ underbestämt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \begin{matrix} (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{matrix} (a) \\ (b'') = \frac{1}{3}(b') \end{matrix}$$

$$z = t \text{ ger } y = -1 + z = -1 + t \\ \text{och } x = 2 + y - z = 2 - 1 + t - t = 1$$

x, y: pivåvariabler
z: fri variabel

divs. lösningsmängden ges av $(x, y, z) = (1, -1 + t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ (∞ många)

2) Lös $\begin{cases} x + y - 2z + 2w = 4 \\ -2x + 2y + 3w = -1 \end{cases}$ 4 obekanta, 2 elv. $\rightarrow$ underbestämt

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right] \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 7 & 7 \end{array} \right] \begin{matrix} (a) \\ (b') = (b) + 2(a) \end{matrix}$$

x, y pivåvariabler
z, w fria -"

$$z = s, w = t \text{ ger } y = \frac{1}{4}(7 + 4z - 7w) = \frac{7}{4} + s - \frac{7}{4}t \\ \text{och } x = 4 - y + 2z - 2w = 4 - \frac{7}{4} - s + \frac{7}{4}t + 2s - 2t = \frac{9}{4} + s - \frac{3}{4}t$$

Lösningsmängden: $(x, y, z, w) = (\frac{9}{4}, \frac{7}{4}, 0, 0) + s(1, 1, 1, 0) + t(-\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, 0, 1)$, $s, t \in \mathbb{R}$ (∞ många)

3) Lös $\begin{cases} x - 2y + 2z = 2 \\ 2x - 4y + 4z = 3 \end{cases}$ 3 obe., 2 elv. $\rightarrow$ underbestämt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{matrix} (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \end{matrix}$$

Detta system är motsägsfullt $\rightarrow$ saknar lösning.

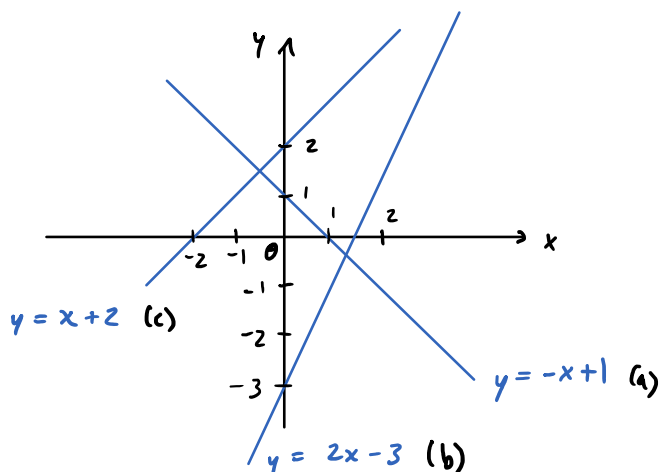
OBS.: Det handlar om två parallella plan.

4) Lös $\begin{cases} x+y=1 & (a) \\ 2x-y=3 & (b) \\ x-y=2 & (c) \end{cases}$ 2 obek., 3 ekv. $\rightarrow$ överbestämt

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} (b)-2(a) \\ (c)-(a) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ 2(b)+3(c) \end{matrix}$$

motsägelsefullt, saknas lösning.



5) Lös $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=-4 \\ x-5y=-11 \end{cases}$ 2 obek., 3 ekv. $\rightarrow$ överbestämt

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -5 & -11 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array} \right] \begin{matrix} (b)-2(a) \\ (c)-(a) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ (b) \cdot (-1/3) \\ (c)-2(b) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow y=2, x=1-y=-1 \Rightarrow \text{parat } (x,y) = (-1,2) \text{ är den entydiga lösningen.}$$

x,y pivå, ingen motsägelse

6) Lös $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=3 \\ x+2y=3 \end{cases}$ 2 obek., 3 ekv. $\rightarrow$ överbestämt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Lösningssmängden
 $(x,y) = (3-2t, t) = (3,0) + t(-2,1), t \in \mathbb{R}$
 (oändligt många lösningar)

- OBS ∴ Ett **kvadratisk** system kan vara motsägelsefullt ($\rightarrow$ ingen lösning), ha bara pivåvariabler ($\Rightarrow$ inga fria, ingen motsägelse $\rightarrow$ en entydig lösning) eller några fria variabler (om utan motsägelse $\rightarrow$ oändligt många lösningar).
- Det samma gäller för ett **överbestämt** system, dock kan här kombinationen "bara pivåvariabler + motsägelse" förekomma.
 - Ett **underbestämt** system har alltid fria variabler och antingen ingen motsägelse ($\rightarrow$ oändligt många lösningar) eller (minst) en motsägelse ($\rightarrow$ lösning saknas).
 - I ett **homogent** ekvationssystem kan inga motsägelser uppstå (högerleden förblir 0 allihop under eliminationsprocessen), och den triviala uppsättningen $(x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ löser alltid systemet. Enligt samma argument som i beviset av Lemma 5.2 är multipler och linjärt-kombinationer av lösningar till ett homogent system också lösningar.
 - Om ingen motsägelse finns, har lösningssmängden lika många parametrar (dvs. dimensioner) som det finns fria variabler.

Om vi i allmänhet betraktar hur högerleden bestäms om ett linjärt ekvationssystem är lösbart eller ej, kommer vi fram till följande resultat:

Sats 5.3 Ett kvadratisk linjärt ekvationssystem har entydig lösning då och endast då alla obekanta är pivåvariabler och är då lösbart för alla uppsättningar av högerled.

Följande påståenden är alltså ekvivalenta för kvadratiske system:

- systemet har entydig lösning för en uppsättning högerled.
- systemet har entydig lösning för alla uppsättningar högerled.
- systemet är lösbart för alla uppsättningar högerled.

Beris: (ii) $\Rightarrow$ (i) är uppenbart.

Om (i) gäller, måste alla obekanta vara pivåvariabler. Då kan det inte finnas en motsägelse ("ingen plats" under elimination nummer n) $\Rightarrow$ systemet är lösbart oavsett uppsättning högerled, dvs. (iii) gäller. Om det finns fria variabler, kan inte varje rad innehålla ett trappsteg, då måste sista raden i trappstegsformen se ut som $[0 \ 0 \dots 0 \ | \ C]$ (vi har n ekvationer, men $< n$ pivåvariabler). Eftersom Gauss eliminationen leder till högerled som är linjärkombinationer av de ursprungliga högerleden kan man ändra dessa så att $C \neq 0$ och lösning saknas. Det gäller alltså (iii) $\Rightarrow$ (ii). $\square$.

Sats 5.4 Ett underbestämt linjärt ekvationssystem har ingen eller oändligt många lösningar

Beris: Det finns definitivt fria variabler (vi har n ekvationer $\rightarrow$ max. n trappsteg men $n > n$ obekanta). Om en motsägelse är inbyggd saknar systemet lösning, annars har det oändligt många.

Sats 5.5 För varje överbestämt linjärt ekvationssystem finns det en uppsättning högerled så att ingen lösning finns.

Beris: Samma idé som ovan: Gauss elimination leder till $[0 \dots 0 \ | \ C]$ i sista raden (observera att antalet ledande nollor i rad k är minst k i trappstegsformen). Om C är lika med noll, kan vi ändra de ursprungliga högerleden så att det inte är det längre och få en motsägelse då. $\square$.

Till slut vill vi hålla fast ett resultat som vi känner igen från kapitlet om diff.ekvationer. Beriset är faktiskt snarligt men släppts upp tills vi kan matriser på riktigt.

Sats 5.6 Låt $\vec{x}_p$ vara en lösning till ett linjärt ekvationssystem. Då ges samtliga lösningar av $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$, där $\vec{x}_h$ står för alla lösningar till motsvarande homogena system.

OBS: $\vec{x}_p$ kallas som förr "partikulärlösning"

• Om systemet är homogent från början funkar enkelt den triviala lösningen $\vec{x}_p = \vec{0}$.

Ex.: Lös

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 10x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = -4 \end{cases}$$

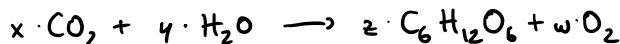
$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 & 10 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array} \right] & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right] & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right] \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

x_1, x_2, x_4 är pivåvariabler
 x_3, x_5 är fria variabler

$$\begin{aligned} x_5 = t, \quad x_3 = s, \quad x_4 = 1 + x_5 = 1 + t, \quad x_2 = 2x_3 + 4x_5 + 4 = 2s + 4t + 4 \\ x_1 = -2x_2 + x_4 - 3x_5 + 2 = -2(2s + 4t + 4) + 1 + t - 3t + 2 = -4s - 10t - 5 \\ \vec{x} = \underbrace{(-5, 4, 0, 1, 0)}_{=\vec{x}_p} + s \underbrace{(-4, 2, 1, 0, 0)}_{=\vec{x}_h} + t \underbrace{(-10, 4, 0, 1, 1)}_{=\vec{x}_h} \end{aligned}$$

5.3 Tillämpningar

Ex.1 Fotosyntesen



ger upphov till följande elv. system

$$\begin{cases} \text{C: } x + 0y = 6z + 0w \\ \text{O: } 2x + y = 6z + 2w \\ \text{H: } 0x + 2y = 12z + 0w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} w &= t, z = \frac{1}{6}t, y = -6z + 2w \\ x &= 6z = t \end{aligned}$$

en heltalslösning ges t.ex. med valet $t=6: (x, y, z, w) = (6, 6, 1, 6)$.

Ex.2

Tre öbor byter varor. En har stenar, en trä och den tredje har kokosnötter. De är överens om att anpassa priset så att ekonomin går jämt upp för alla tre. Han med stenarna vill behålla 70% av stenarna, köpa 20% av träet och 10% av kokosnötterna. Han med trä vill behålla 60% av virket, köpa 30% av stenarna och 20% av kokosnötterna. Skriv v_s, v_t, v_k för värdet av stenarna, träet och kokosnötterna.

$$v_s = 0.7 \cdot v_s + 0.2 \cdot v_t + 0.1 \cdot v_k \Leftrightarrow 0.3 v_s - 0.2 v_t - 0.1 v_k = 0$$

$$v_t = 0.3 \cdot v_s + 0.6 \cdot v_t + 0.2 \cdot v_k \Leftrightarrow 0.4 v_t - 0.3 v_s - 0.2 v_k = 0$$

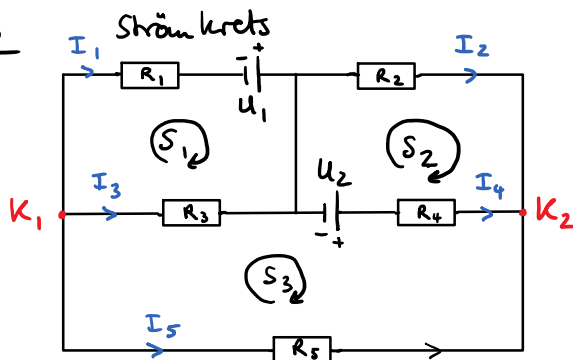
$$v_k = 0 \cdot v_s + 0.2 v_t + 0.7 \cdot v_k \Leftrightarrow 0.3 v_k - 0.2 v_t = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & -0.1 & 0 \\ -0.3 & 0.4 & -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.3 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_k = c \text{ (fri variabel)}, v_t = \frac{0.3}{0.2} v_k = \frac{3}{2}c, v_s = \frac{0.2 v_t + 0.1 v_k}{0.3} = \frac{0.4}{0.3}c = \frac{4}{3}c$$

$$\vec{v} = (v_s, v_t, v_k) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right) \cdot c, c \in \mathbb{R}, \text{ blir då lösningsskungan.}$$

Ex.3



$$R_1 = R_2 = 1 \Omega$$

$$R_3 = R_4 = 2 \Omega$$

$$R_5 = 4 \Omega$$

$$U_1 = 2 \text{ V}$$

$$U_2 = 4 \text{ V}$$

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 \text{ obekanta}$$

Kirchhoffs första lag:

$$I_{in} = I_{out} \text{ dvs.}$$

Kirchhoffs andra lag:

potentialändringar i en slinga summeras till noll.

Ohms lag: $U = R \cdot I$

$$i K_1: I_1 + I_3 + I_5 = 0$$

$$i K_2: 0 = I_2 + I_4 + I_5$$

$$i S_1: U_1 + R_3 I_3 - I_1 R_1 = 0$$

$$i S_2: -U_2 - R_2 I_2 + I_4 R_4 = 0$$

$$i S_3: U_2 - R_4 I_4 + R_5 I_5 - I_3 R_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & -U_1 \\ 0 & -R_2 & 0 & R_4 & 0 & U_2 \\ 0 & 0 & -R_3 & -R_4 & R_5 & -U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e)}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 14 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(c) \cdot 2 \\ (d) + (c) \\ (e) + 2(c)}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} I_5 = -\frac{1}{2} \text{ A} \\ I_4 = \frac{3}{2} \text{ A} \\ I_3 = -\frac{1}{2} \text{ A} \\ I_2 = -1 \text{ A} \\ I_1 = 1 \text{ A} \end{cases}$$

vilket är den enda lösningen.