

6.2 Matriser och linjära ekvationssystem

Äntligen kan vi se tillbaka på linjära ekv. system genom "matris - glasögon":

Ex.: • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 \\ 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + (-1)x_2 + (-2)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

och $A\vec{x} = \vec{y}$ blir då ekv. systemet
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

• Självklart kan vi gå andra hållet också:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{y}$$

med **koefficientmatrisen** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ och högerled $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

OBS: • I kapitlet om linjära ekv. system använde vi för Gausseliminationen den utökade matrisen $[A | \vec{y}]$.

• Enligt **Sats 6.2** kan $A\vec{x}$, där $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ och $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ skrivas som linärkombination av kolonnerna i A : $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$.

Med A som ovan alltså: $A\vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vilken lösningsmängd ekvationssystemet har beror därför mycket på egenskaper hos koefficientmatrisens kolonner.

Nu vill vi se beviset av **Sats 5.6** i lite elegantare form:

Satsen påstår att om $\vec{x}_p$ är en lösning till $A\vec{x} = \vec{y}$ och $\vec{x}_h$ står för alla lösningar till motsvarande homogena ekv. system $A\vec{x} = \vec{0}$, så ges alla lösningar till $A\vec{x} = \vec{y}$ av

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$

Bevis: (jfr. med **Sats 2.1** och dess bevis)

Vi måste verifiera att givet en lösning $\vec{x}_p$ till $A\vec{x} = \vec{y}$:

- 1) alla lösningar $\vec{x}$ till $A\vec{x} = \vec{y}$ kan skrivas på formen $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$ och
- 2) för godtyckligt $\vec{x}_h$ uppfyller $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$ ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{y}$.

1) ta en godtycklig lösning $\vec{x}_0$ till $A\vec{x} = \vec{y}$ och betrakta $(\vec{x}_0 - \vec{x}_p)$:

$$\underbrace{A(\vec{x}_0 - \vec{x}_p)}_{\text{distr.}} = \underbrace{A\vec{x}_0}_{\text{både } \vec{x}_0, \vec{x}_p \text{ löser } A\vec{x} = \vec{y}} - \underbrace{A\vec{x}_p}_{\text{både } \vec{x}_0, \vec{x}_p \text{ löser } A\vec{x} = \vec{y}} = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_0 - \vec{x}_p \text{ löser det homogena systemet}$$

alltså $\vec{x}_h = \vec{x}_0 - \vec{x}_p \Rightarrow \vec{x}_0 = \vec{x}_h + \vec{x}_p \ll$

2) $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$ ska uppfylla $A\vec{x} = \vec{y}$. Vi kontrollerar:

$$\underbrace{A\vec{x}}_{\text{distr.}} = \underbrace{A\vec{x}_p}_{\text{distr.}} + \underbrace{A\vec{x}_h}_{\text{distr.}} = \vec{y} + \vec{0} = \vec{y}. \text{ Det stämmer!}$$

$$\begin{array}{l} \vec{x}_p \text{ är en lösning till } A\vec{x} = \vec{y} \\ \vec{x}_h \text{ — " — } A\vec{x} = \vec{0} \end{array}$$

□.

6.3 Inversen av en matris

När det gäller reella tal löser vi ut x ifrån $ax=y$ genom att dela med a (om $a \neq 0$) och får $x = \frac{y}{a}$.

Efter lite fundering kommer man då naturligtvis på idén att hitta en matris B så att B och A tar ut varandra i meningen att $BA\vec{x} = \vec{x}$ (för då följer $\vec{x} = B\vec{y}$ omedelbart).

Motsvarigheten till 1 (som uppfyller $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$) för matriser är den så kallade **enhetsmatrisen**, som är en diagonalmatris med ettor på diagonalen och nollor annars. Denna finns i olika "storlekar", men betecknas oftast med I avsett. I 3×3 form är det t.ex. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kontrollera att $AI = IA = A$ för alla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (där $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$).

OBS: • Det kan inte finnas fler matriser med dessa egenskaper:

Anta att I' har också dessa egenskaper, då följer $I' = I'I = I$.

- För att $AI = IA = A$ är möjligt måste både A och I vara kvadratiska och av samma dimension!

Def. 6.1 Inversen

Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas inverterbar om det finns en matris $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sådan att $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. A^{-1} kallas då inversen till A .

OBS: igen måste A och A^{-1} vara kvadratiska (och av samma dimension) så att både AA^{-1} och $A^{-1}A$ är definierade!

Ex: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ har inversen $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}A$

I allmänhet har $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversen $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ om $ad \neq bc$.

Kontrollera gärna!

Om alltså $A\vec{x} = \vec{y}$ där $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ och $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ska lösas, observerar vi att koefficientmatrisen

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ har inversen $A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ och den entydiga lösningen ges då av $\vec{x} = A^{-1}\vec{y} = \begin{pmatrix} 4/11 & 3/11 \\ 1/11 & -2/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/11 \\ 7/11 \end{pmatrix}$.

OBS: Inte alla (även kvadratiska) matriser $\neq \emptyset$ har en invers!

Vi såg ett exempel där $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A \neq \emptyset \neq B$ och $BA = \emptyset$

Skulle B ha invers $B^{-1} \Rightarrow B^{-1}(BA) = (B^{-1}B)A = IA = A$, men också $B^{-1}(BA) = B^{-1}\emptyset = \emptyset \nLeftarrow$

Sats 6.3 Om inversen finns är den entydig.

Bevis: Anta att till $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ finns $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ så att $AB = \underline{BA} = I = AC = CA$.

$$\Rightarrow B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \quad \square$$

Sats 6.4 För inverterbara matriser A, B av samma dimension gäller

- (i) $(A^{-1})^{-1} = A$,
- (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ och
- (iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bevis: (i) A^{-1} är inverterbar enligt definitionen om det finns en matris C med egenskapen $A^{-1}C = CA^{-1} = I$. Vi vet att A har denna egenskap $\Rightarrow A^{-1}$ är inverterbar och $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = (I)^T = I = (I)^T = (A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iii) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI A^{-1} = AA^{-1} = I$ } AB är inverterbar och
 $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$ } $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\square$.

OBS.: (iii) för fler än 2 faktorer (samma bevis): För inverterbara A_i gäller $(A_1 A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Ensidiga inverser

Def. 6.2 Om det finns en matris V så att $VA = I$ kallas den **vänsterinvers** till A , en matris H sådan att $AH = I$ **högerinvers** till A .

OBS.: • Enligt Def. 6.1 är för inverterbar A matrisen A^{-1} både vänster- och högerinvers.
 • Om A är kvadratisk och har både vänster- och högerinvers är dessa lika:
 $V = VI = V(AH) = (VA)H = IH = H \Rightarrow V = H = A^{-1}$
 • Om A inte är kvadratisk, låt oss säga av form $n \times m$, kan en vänsterinvers bara finnas om $n > m$ och en högerinvers bara om $n < m$.
 • Vi kommer visa att för kvadratisk A : existensen av antingen vänster- eller högerinvers medför att båda finns och $V = H = A^{-1}$.

Lemma 6.1 (a) Om A har vänsterinvers, så har $A\vec{x} = \vec{y}$ entydig lösning för alla $\vec{y}$.
 (b) Om $A\vec{x} = \vec{y}$ har lösning för alla $\vec{y}$ har A en högerinvers.

Bevis: (a) Enligt Sats 6.3 räcker det att visa att $A\vec{x} = \vec{y}$ har entydig lösning för något $\vec{y}$.
 Vi väljer $\vec{y} = \vec{0}$: $A\vec{x} = \vec{0}$ har bara $\vec{x} = \vec{0}$ som lösning, därför att gånga med vänsterinversen V från vänster ger $\vec{x} = I\vec{x} = (VA)\vec{x} = V(A\vec{x}) = V\vec{0} = \vec{0}$.
 och vi vet att $\vec{x} = \vec{0}$ löser $A\vec{x} = \vec{0}$. $\rightarrow$ entydig lösning. $\square$

(b) Om man väljer $\vec{y}_i = \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dots$ $\vec{y}_n = \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ finns det lösningar $\vec{x}_i$ till $A\vec{x} = \vec{y}_i$.
 $\Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Sats 6.1}}{=} \begin{pmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \dots & A\vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_1 & \vec{y}_2 & \dots & \vec{y}_n \end{pmatrix} = I$.
 dvs. $H = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$ är en högerinvers.

Sats 6.5 Om A är kvadratisk och har antingen en vänsterinvers V eller en högerinvers H , så är den inverterbar och $V = H = A^{-1}$.

Bevis: Enligt vår observation efter Def. 6.2 räcker det att visa att existens av antingen V eller H medför existens av den andra. (för då är $V = H \Rightarrow V = H = A^{-1}$)

• Anta först att A har vänsterinvers V $\stackrel{\text{La 6.1 (a)}}{\Rightarrow} A\vec{x} = \vec{y}$ har entydig lösning för alla $\vec{y}$
 $\stackrel{\text{La 6.1 (b)}}{\Rightarrow}$ Det finns en högerinvers H till A .
 • Anta nu att A har högerinvers istället, dvs. $AH = I$ för något H .
 $\Rightarrow A$ är vänsterinvers till H $\stackrel{\text{första delen}}{\Rightarrow}$ det finns en högerinvers till H , låt oss skriva H' för den.
 OBS: $A = H' = H^{-1}$ dvs. $H H' = HA = I \Rightarrow H$ är också vänsterinvers till A . $\square$

Med det kan vi utöla sats 5.3:

Sats 5.3' Följande påståenden är ekvivalenta för kvadratiska system:

- (i) systemet har entydig lösning för en uppsättning högerled.
- (ii) systemet har entydig lösning för alla uppsättningar högerled.
- (iii) systemet är lösbart för alla uppsättningar högerled.
- (iv) koefficientmatrisen är inverterbar.

Beris: Att (i), (ii), (iii) är ekvivalenta vet vi från Sats 5.3.

Enligt Lemma 6.1 (b) följer ur (iii) att koefficientmatrisen har högerinvers. Då den är kvadratisk följer (iv) ur Sats 6.5.

Om däremot (iv) gäller finns i symmetri en vänsterinvers och (ii) följer ur Lemma 6.1 (a). □

Beräkning av inversen (med hjälp av bakåteliminering)

Ex.: • Vi vill beräkna inversen till $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (om en sådan finns).

Vi vet att $A\vec{x} = \vec{y}$ leder till $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ (om A är inverterbar) och antar godtyckliga $\vec{x} = (x_1, x_2)$ och $\vec{y} = (y_1, y_2)$ för att hitta A^{-1} : $A\vec{x} = \vec{y}$ blir då

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & y_1 \\ 1 & 2 & y_2 \end{array} \right] \xrightarrow{(a)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y_2 \\ 0 & -1 & y_1 - 3y_2 \end{array} \right] \xrightarrow{(a) - 3(b)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2y_1 - 5y_2 \\ 0 & -1 & y_1 - 3y_2 \end{array} \right] \xrightarrow{2(a) - 5(b)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2y_1 - 5y_2 \\ 0 & -1 & y_1 - 3y_2 \end{array} \right] \xrightarrow{-(a) + 3(b)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2y_1 - 5y_2 \\ 0 & 1 & -y_1 + 3y_2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2y_1 - 5y_2 \\ x_2 = -y_1 + 3y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} = A^{-1}\vec{y}$$

• Beräkna inversen till $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{y}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & y_1 \\ 2 & -6 & y_2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -y_1 \\ 0 & 0 & y_2 + 2y_1 \end{array} \right]$$

Då kraschar metoden, men det är bra att den gör det för att andra raden visar att systemet kan sakna lösning (t.ex. $y_1 = 1, y_2 = 0$).
Sats 5.3' $\Rightarrow A$ är inte inverterbar.

• Beräkna inversen till $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & y_1 \\ -2 & 3 & 0 & y_2 \\ 3 & -5 & 1 & y_3 \end{array} \right] \xrightarrow{(b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & y_1 \\ 0 & -1 & -2 & y_2 + 2y_1 \\ 0 & 1 & 4 & y_3 - 3y_1 \end{array} \right] \xrightarrow{(b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & -y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 2 & y_2 + y_3 - y_1 \end{array} \right] \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & -2y_2 - y_3 - y_1 \\ 0 & 0 & 2 & y_2 + y_3 - y_1 \end{array} \right] \xrightarrow{(b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 - 2y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3) \end{array} \right] \xrightarrow{(b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}y_1 - \frac{7}{2}y_2 - \frac{3}{2}y_3 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 - 2y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Testas: } A A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I.$$

• Lös matricekvationen $2I + XA = B$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, dvs. bestäm 3×3 matrisen X .

$$2I + XA = B \Leftrightarrow XA = B - 2I \Leftrightarrow X(AA^{-1}) = (B - 2I)A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X = XI = (B - 2I)A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Att ansätta X med 9 okända vill vi helst undvika!

Ortogonala matriser

Def. 6.3 En kvadratisk matris vars kolonner är en mängd ortonormerade vektorer kallas **ortogonal**.

OBS: $Q = (\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n)$ är alltså ortogonal om $\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq j \\ 1 & \text{om } i = j \end{cases}$ (då $\|\vec{q}_i\|^2 = 1^2 = 1$)
Namnet "ortogonal" är vilseledande (då $\vec{q}_i \perp \vec{q}_j \forall i \neq j$ inte räcker) men etablerat.

Ex: $I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ eller $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ser man genom att beräkna $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1 = \frac{1}{9} (1^2 + 2^2 + 2^2) = 1$, $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = \frac{1}{9} (-2 - 2 + 4) = 0$
där $\vec{q}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. osv.

Sats 6.6 Om A är kvadratisk, så gäller
 A är ortogonal $\Leftrightarrow A$ är inverterbar och $A^{-1} = A^T$

Beris: " $\Rightarrow$ " $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$ är ortogonal betyder att $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq j \\ 1 & \text{om } i = j \end{cases}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\Rightarrow A^T$ är vänsterinvers till A ^{Sats 6.5} $\Rightarrow A^T = A^{-1}$ och A är inverterbar

" $\Leftarrow$ " om A är inverterbar och $A^{-1} = A^T \Rightarrow I = A^{-1} A = A^T A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_n \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = 1 \forall i$ och $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \forall i \neq j$

□.

Anmärkning: • Om en kvadratisk matris A är ortogonal $\Rightarrow A$ är inverterbar och $A^{-1} = A^T$
 $\Rightarrow A A^T = A^T A = I \Rightarrow A^T$ är inverterbar och $(A^T)^{-1} = A = (A^T)^T \Rightarrow A^T$ är ortogonal.

Börjar vi samma implikationskedja med A^T istället för A inser vi att

A är ortogonal $\Leftrightarrow A^T$ är ortogonal

Dvs. vi kan inte ha ortonormerade kolonner i en kvadratisk matris utan att raderna är också det.

• Om A är både symmetrisk och ortogonal följer: $A^{-1} \overset{A \text{ ortogonal}}{=} A^T \overset{\text{symmetrisk}}{=} A$
Ex: $A = \begin{pmatrix} \sin \kappa & \cos \kappa \\ \cos \kappa & -\sin \kappa \end{pmatrix}$, $\kappa \in [0, 2\pi)$

en så kallad rotationsmatris.

$$\text{Testar: } A A = \begin{pmatrix} \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa & \sin \kappa \cos \kappa - \sin \kappa \cos \kappa \\ \cos \kappa \sin \kappa - \sin \kappa \cos \kappa & \cos^2 \kappa + (-\sin \kappa)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$