

7

Centralt begrepp inom linjär algebra

7.1 Linjärt beroende/oberoende

Låt oss börja med att formellt definiera mängden av vektorer som ges som linjärkombinationer av några givna vektorer:

Def. 7.1 För $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{R}^n$ kallas
 $\text{Span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = \{ \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \}$ det linjära
 höljat eller spannet av vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$

Ex: $\vec{u}_1 = (1, 0, 2), \vec{u}_2 = (3, -1, 2), \vec{v} = (-1, 1, 2)$

$\text{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \{ s \cdot (1, 0, 2) + t \cdot (3, -1, 2); s, t \in \mathbb{R} \}$ (ett plan i parameterform)

vilket är alltså planet som spänns upp av $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ och innehåller origo.

För att kunna avgöra om $\vec{v} \in \text{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, alltså om $\vec{v}$ kan skrivas som linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ eller ej behöver vi lösa ett linjärt ekv.system:

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 3 = -1 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot (-1) = 1 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \lambda_2 = -1, \lambda_1 = 2 \text{ dvs. } \vec{v} = 2 \cdot \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in \text{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

Anmärkning: För två vektorer i $\mathbb{R}^3$ är spannet i normalfallet ($\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2$) ett plan och en godtycklig tredje vektor ligger i allmänhet inte i detta.

Def. 7.2 Vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{R}^n$ kallas **linjärt beroende** om någon av dem är en linjär kombination av de övriga, dvs. om det finns $i \in \{1, \dots, p\}$ så att $\vec{u}_i \in \text{Span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_p)$.
 Annars kallas de linjärt oberoende.

Ex.: Enligt exemplet ovan är $\vec{u}_1 = (1, 0, 2), \vec{u}_2 = (3, -1, 2), \vec{u}_3 = (-1, 1, 2)$ linjärt beroende då $\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in \text{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ och $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ är linjärt oberoende:

$\vec{e}_1 = \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \end{array} \right] \text{ saknar lösning}, \vec{e}_3 = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ saknar lösning,}$
 samma för $\vec{e}_2 = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_3 \vec{e}_3$.

- En mängd vektorer som innehåller nollvektorn är alltid linjärt beroende: $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ där $\vec{u}_p = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} = 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_{p-1}$
- Om man utökar en mängd linjärt beroende vektorer med ytterligare vektorer förblir de linjärt beroende.
- Tar man en delmängd av linjärt oberoende vektorer är de linjärt oberoende.

OBS.: • En vektor är linjärt beroende om det handlar om nollvektorn.

• Två vektorer är linjärt beroende om dessa är parallella.

• Från avsnittet om area/volymer (4.4) vet vi att:

- Två vektorer i $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ spänner upp ett parallelogram med area > 0 då och endast då de är icke-parallella $\Leftrightarrow$ de är linjärt oberoende

- Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ spänner upp en parallelepiped med volym > 0 då och endast då de inte ligger i samma plan $\Leftrightarrow$ de är linjärt oberoende

• Det är i allmänhet inte möjligt att skriva alla vektorer som linjärkombination av de övriga i en mängd linjärt beroende vektorer:

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 0), \vec{u}_2 = (0, 1, 0), \vec{u}_3 = (0, 0, 1), \vec{u}_4 = (0, -1, 1)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 + \lambda_4 \vec{u}_4 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \end{bmatrix} \text{ saknas lösning} \\ \vec{u}_4 &= \vec{u}_3 - \vec{u}_2 \in \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \end{aligned}$$

Det räcker alltså inte att kontrollera för en godtycklig vektor ur mängden!
Lyckligtvis finns det en genväg:

Sats 7.1 (a) Vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ den enda lösningen av $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}$ är den triviala $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.
(b) Vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ ekvationen $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}$ har en icke-trivial lösning, dvs. en lösning där $\lambda_i \neq 0$ för något $i \in \{1, \dots, p\}$.

Bevis: (a) följer direkt ur (b).

(b) " $\Rightarrow$ " Det finns $i \in \{1, \dots, p\}$ så att $\vec{u}_i = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{u}_{i-1} + \lambda_{i+1} \vec{u}_{i+1} + \dots + \lambda_p \vec{u}_p$
för några $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{u}_{i-1} + (-1) \vec{u}_i + \lambda_{i+1} \vec{u}_{i+1} + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}$$

$\nexists \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_p$ är en icke-trivial lösning.

" $\Leftarrow$ " om $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}$ där $\lambda_1 \neq 0$ (utan inskränkning, numrera om annars)

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\lambda_1} (-\lambda_2 \vec{u}_2 - \dots - \lambda_p \vec{u}_p) \in \text{span}(\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \Rightarrow \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \text{ linj. beroende.} \quad \square$$

Ex.: $\vec{u}_1 = (1, 0, -2, 3), \vec{u}_2 = (2, 1, -1, 0), \vec{u}_3 = (-1, -2, -4, 9) \in \mathbb{R}^4$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ Vi har alltså oändligt många lösningar (} \lambda_3 \text{ är en fri variabel). t.ex. } \lambda_3 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_1 = -3 \text{ är en icke-trivial lösning} \Rightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \text{ är linjärt beroende}$$

Anmärkning: • Enligt vår kunskap om (homogena) linjära ekvationssystem är normalfallet att m stycken godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende om $m \leq n$. (leder till överbestämt eller kvadratiskt ekv. system)
• Om $m > n$ är de däremot alltid linjärt beroende då motsvarande system är underbestämt ($\rightarrow$ fria variabler) och inte innehåller en motsägelse (då homogent).

Att det finns exakt ett sätt att skriva nollvektorn som linjärkombination av linjärt oberoende vektorer har inte med nollvektorn att göra:

Sats 7.2 Följande påståenden är ekvivalenta:

- (i) Vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ är linjärt oberoende
- (ii) För $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p \in \text{span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ är koefficienterna $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ entydigt bestämda.

bevis: " $\Rightarrow$ " Om $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \lambda'_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda'_p \vec{u}_p$
 $\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda'_1) \vec{u}_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda'_p) \vec{u}_p = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$
 (i) och Sats 7.1 $\lambda_1 - \lambda'_1 = \lambda_2 - \lambda'_2 = \dots = \lambda_p - \lambda'_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_p = \lambda'_p$ dvs. lk. är entydig.
 " $\Leftarrow$ " Väljer $\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{0} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p$ (då $\vec{0} \in \text{span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$)
 och $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ är entydigt bestämda. Så måste det vara den triviala uppsättningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.
Sats 7.1 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ är linjärt oberoende. □

7.2 Baser

Om $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{R}^n$ är sådana att alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som en linjärkombination av dessa, så säger man att vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ spänner upp hela $\mathbb{R}^n$. Är de dessutom linjärt oberoende, kallas mängden $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ en bas av $\mathbb{R}^n$:

Def. 7.3 Vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{R}^n$ sägs ...

- (a) ... spänna upp $\mathbb{R}^n$ om $\text{span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = \mathbb{R}^n$.
- (b) ... utgöra en bas för $\mathbb{R}^n$, om $\text{span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = \mathbb{R}^n$ och $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ är linj. oberoende.

OBS: $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ om alla $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p$ och de utgör en bas om talen $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ är entydigt bestämda för alla $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
 (följer ur Sats 7.2 och def. ovan)

Ex: • $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{u}_2 = (4, 5, 6)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, -3)$

Kan varje $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ skrivas som $\vec{v} = x \vec{u}_1 + y \vec{u}_2 + z \vec{u}_3$?

$$\vec{v} = x \vec{u}_1 + y \vec{u}_2 + z \vec{u}_3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & v_1 \\ 2 & 5 & -1 & v_2 \\ 3 & 6 & -3 & v_3 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & v_1 \\ 0 & -3 & -3 & v_2 - 2v_1 \\ 0 & -6 & -6 & v_3 - 3v_1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3}(v_2 - 2v_1) \\ 0 & 0 & 0 & v_3 + v_1 - 2v_2 \end{array} \right]$$

Om $v_1 + v_3 - 2v_2 \neq 0$ får vi en motsägelse, alltså t.ex. $\vec{v} = (1, 1, 0)$

kan inte skrivas som l.k. av $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$. $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ spänner alltså inte upp $\mathbb{R}^3$.

• $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$

spänner upp $\mathbb{R}^n$: $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ kan skrivas som $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$.

De utgör också en bas (är linjärt oberoende: samma bevis som ovan för $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$).

Den här kallas standardbasen eller den kanoniska basen.

5.3 Kopplingen av dessa begrepp till linjära ekvationssystem

Av Sats 6.2 har vi lärt oss att vänsterledet i ekv. systemet $A\vec{x} = \vec{y}$ kan skrivas som $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_p\vec{a}_p$, där $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ och $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ är koefficientmatrisens kolonner, alltså en linjärkombination av kolonnerna.

När man undersöker om vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende går det ju ut på att kontrollera om $x_1\vec{u}_1 + \dots + x_p\vec{u}_p = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{u}_p \end{pmatrix} = \vec{0}$ bara har den triviala lösningen $\vec{x} = \vec{0}$.

OBS:. När man övergår till ett linjärt ekv. system på det sättet motsvarar antalet vektorer (p) antalet obekanta och deras dimension (n) antalet ekvationer, dvs. koefficientmatrisen är av form $n \times p$.

Med våra nya begrepp kan vi formulera följande samband:

Sats 7.3

- (a) Kolonnerna i matrisen A är linjärt oberoende
 $\Leftrightarrow$ ekv. systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har entydig lösning.
- (b) Kolonnerna i matrisen A av form $n \times p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$
 $\Leftrightarrow$ ekv. systemet $A\vec{x} = \vec{y}$ har lösning för varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
- (c) Kolonnerna i matrisen A av form $n \times p$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$
 $\Leftrightarrow$ ekv. systemet $A\vec{x} = \vec{y}$ har entydig lösning för varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

bevis:

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_p\vec{a}_p \quad (\text{Sats 6.2})$$

- (a) $A\vec{x} = \vec{0}$ har entydig lösning (dvs. bara den triviala $\vec{x} = \vec{0}$)
 $\Leftrightarrow 0 \cdot \vec{a}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_p$ är det enda sättet att skriva $\vec{0}$ som linjärkombination av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ $\Leftrightarrow$ ^{Sats 7.1} $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ är linj. oberoende.
- (b) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som linjärkombination
 $\vec{y} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_p\vec{a}_p \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \vec{y}$, dvs. för alla $\vec{y}$ har $A\vec{x} = \vec{y}$ en lösning.
- (c) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ utgör en bas av $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ det finns ett entydigt bestämt sätt att skriva $\vec{y}$ som linjärkomb. $\vec{y} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_p\vec{a}_p$ för varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$
 $\Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \vec{y}$ med entydigt bestämda $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$
 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{y}$ har en entydig lösning för alla högerled $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. □.