

För en koefficientmatris A av form $n \times p$ (n rader, p kolonner) gäller följande samband:

- Sats 7.3**
- (a) Kolonnerna i matrisen A är linjärt beroende
 $\Leftrightarrow$ elev. systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har entydig lösning.
 - (b) Kolonnerna i matrisen A (av form $n \times p$) spänner upp $\mathbb{R}^n$
 $\Leftrightarrow$ elev. systemet $A\vec{x} = \vec{y}$ har lösning för varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
 - (c) Kolonnerna i matrisen A (av form $n \times p$) utgör en bas för $\mathbb{R}^n$
 $\Leftrightarrow$ elev. systemet $A\vec{x} = \vec{y}$ har entydig lösning för varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

- Vi har redan observerat att $>n$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ måste vara linj. beroende (leder till underbestämt homogent elev. system): $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ linj. beroende $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ har bara den triviala lösningen där $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{u}_1 & \dots & \vec{u}_m \\ | & | & | \end{pmatrix}$ är av form $n \times m$, vilket är ett underbestämt homogent system för $m > n$.

Ex: $\vec{u}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, -2, 0)$, $\vec{u}_4 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 + x_4\vec{u}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} x_4 \text{ fri} \\ \text{variabel} \end{array}$$

t.ex. $x_4 = 1, x_3 = 2, x_2 = -1, x_1 = 1$ är en icke-trivial lösning. $\rightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ linj. beroende.

- Å andra sidan kan färre än n vektorer inte spänna upp hela $\mathbb{R}^n$: För att $p < n$ vektorer $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ måste enligt **Sats 7.3 (b)** $A\vec{x} = \vec{y}$ ha en lösning för alla $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, där $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{u}_1 & \dots & \vec{u}_p \\ | & | & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Med $p < n$ är dock elev. systemet överbestämt och enligt **Sats 5.5** finns det då alltid uppsättningar högerled $\vec{y}$ så att ingen lösning finns.

Sambandet har vi kommit fram till

Lemma 7.1 För $\mathbb{R}^n$ gäller:

- (i) Fler än n vektorer är alltid linjärt beroende.
- (ii) Färre än n vektorer kan inte spänna upp $\mathbb{R}^n$.

Sats 7.4 Varje bas för $\mathbb{R}^n$ består av exakt n stycken vektorer.

Bevis: Direkt ur Lemma 7.1.

□.

Om vi har en mängd av exakt n stycken vektorer i $\mathbb{R}^n$, så är alla tre egenskaper vi införde ekvivalenta:

Sats 7.5 Låt $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$. Då är följande påståenden ekvivalenta:

- (a) $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ är linjärt oberoende.
- (b) $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.
- (c) $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.

Bevis: Om vi skriver $A = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, som då blir en $n \times n$ matris, följer från **Sats 7.3**

- att (a) $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ har entydig lösning
- (b) $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{y}$ har lösning för varje högerled $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
- (c) $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{y}$ har entydig lösning för varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

För ett kvadratisk linj. ekv. system är dessa ekvivalenta som vi visade i **Sats 5.3**. $\square$

Ex.: - Undersök om $\vec{u}_1 = (3, 1, 5)$, $\vec{u}_2 = (1, 5, 3)$ och $\vec{u}_3 = (5, 8, 3)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

Enligt **Sats 7.5** räcker det att kontrollera om $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är linjärt oberoende eller ej:

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -14 & -19 & 0 \\ 0 & -22 & -37 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -14 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & 0 \end{array} \right]$$

Bara pivotvariabler $\Rightarrow$ entydig lösning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

- Om $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$ är sådana att $\vec{u}_i \neq \vec{0}$ och $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ för alla $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, dvs. n stycken parvis ortogonala vektorer utav vilka ingen är nollvektorn, då utgör de en bas för $\mathbb{R}^n$: Enligt **Sats 7.5** räcker det att visa att $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ är linj. oberoende!
 $x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n = \vec{0}$ kan gångas med $\vec{u}_1$: $x_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n \cdot \vec{u}_1 = \vec{0} \cdot \vec{u}_1$
 $\underbrace{\phantom{x_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n \cdot \vec{u}_1}}_{= x_1 \cdot \|\vec{u}_1\|^2} \underbrace{\phantom{x_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n \cdot \vec{u}_1}}_{= 0, \text{ då } \vec{u}_i \perp \vec{u}_1} = 0$
 $\Rightarrow$ eftersom $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$, alltså $\|\vec{u}_1\|^2 > 0$, följer $x_1 = 0$.
 Samma argument ger $x_i = 0$ för alla $i \in \{1, \dots, n\}$. $\Rightarrow \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ är linj. oberoende. $\square$

Vi kan nu utöka **Sats 5.3** (och 5.3') ytterligare:

Sats 7.6 För $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är följande påståenden ekvivalenta

- (i) Kolumnerna $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.
- (ii) — " — $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ är linjärt oberoende.
- (iii) — " — $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.
- (iv) Ekv. systemet $A\vec{x} = \vec{y}$ har entydig lösning för varje högerled $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
- (v) — " — $A\vec{x} = \vec{y}$ har entydig lösning för något högerled $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
- (vi) — " — $A\vec{x} = \vec{y}$ är lösbart för varje högerled $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
- (vii) Matrisen A är inverterbar.

Bevis: Kombination av **Sats 5.3'**, **Sats 7.3** samt **Sats 7.5**.

$\square$.

7.4 Rang av en matris

Vi har observerat (med hjälp av Sats 6.2: $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_p\vec{a}_p$ om $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_p \\ | & & | \end{pmatrix}$) att $A\vec{x} = \vec{y}$ är lösbart då och endast då högerledet är en linjärkombination av kolonnerna i koefficientmatrisen A , alltså $\vec{y} \in \text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$.

Def. 7.4 Spannet $\text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ av kolonnerna i matrisen A kallas **kolonnrummet**. **Rangen** av matrisen A är då det maximala antalet linjärt oberoende kolonner i A (som motsvarar "dimensionen" av kolonnrummet) och betecknas med **rang** (A).

Ex: • Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar, är kolonnerna linjärt oberoende, alltså kolonnrummet hela $\mathbb{R}^n$ (kolonnerna utgör en bas för $\mathbb{R}^n$) och $\text{rang}(A) = n$. Och omvänt gäller: $\text{rang}(A) = n \xRightarrow{\text{Sats 7.5}} A$ är inverterbar.

• Bestäm rangen av $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ t. ex. $x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = -3$ är en icke-trivial lösning till $A\vec{x} = \vec{0}$
 dvs. kolonnerna är linjärt beroende, $\text{rang}(A) < 3$. Då $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ inte ligger på samma linje dvs. är linj. oberoende följer $\text{rang}(A) \geq 2$, alltså $\Rightarrow \text{rang}(A) = 2$.

OBS: När vi Gauss-eliminerade ändrades inte rangen i exemplet! Och detta inte av en slump:

Sats 7.7 Låt G vara den ekvivalenta matrisen till A i trappstegsform
 $\Rightarrow \text{rang}(G) = \text{rang}(A)$

Beris: Eftersom $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow G\vec{x} = \vec{0}$ (vi ändrar inte lösningsmängden under Gauss-eliminationen och högerledet ändras inte heller om ekv. systemet är homogent) följer med Sats 7.1 att ett urval kolonner i A är linjärt oberoende då och endast då motsvarande kolonner i G är det. $\square$

Lemma 7.2 (i) Om vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{R}^n$, där $p \leq n$, är sådana att koordinat j är lika med 0 hos vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{j-1}$ och $\neq 0$ hos $\vec{u}_j$, för alla $j \in \{1, \dots, p\}$, då är $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ linjärt oberoende.

(ii) Låt $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$, där $m \leq n$.

Det maximala antalet linjärt oberoende vektorer i $\text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ är m .

Beris: (i) Vi undersöker om $\lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_p\vec{u}_p = \vec{0}$ har en icke-trivial lösning $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq \vec{0}$:
 Låt som vanligt $\vec{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ där ettan står som koordinat j .
 Gånggras vi båda sidor med $\vec{e}_p$ följer: $\lambda_1 \underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_p}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_p}_{=0} + \dots + \lambda_p \underbrace{\vec{u}_p \cdot \vec{e}_p}_{\neq 0} = \underbrace{\vec{0} \cdot \vec{e}_p}_{=0}$,
 alltså $\lambda_p = 0$.

Fortsätter vi med samma strategi (gångra $\lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_{p-1}\vec{u}_{p-1} = \vec{0}$ med $\vec{e}_{p-1}$) följer först $\lambda_{p-1} = 0$ och i slutändan $\lambda_p = \lambda_{p-1} = \dots = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Alltså är $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ linj. oberoende.

(ii) Låt $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ och $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_m \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Då finns det alltså (Sats 6.2) vektorer $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^m$ så att $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$.

$\lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_k\vec{v}_k \stackrel{\text{Sats 6.2}}{=} (A\vec{u}_1 \dots A\vec{u}_k) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \stackrel{\text{Sats 6.1}}{=} A U \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ där $U = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{u}_1 & \dots & \vec{u}_k \\ | & & | \end{pmatrix}$.

För $k > m$ är $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^m$ linj. beroende, dvs. det finns $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq \vec{0}$ så att $U \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_k\vec{u}_k = \vec{0}$,
 alltså $\lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_k\vec{v}_k = A U \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = A\vec{0} = \vec{0}$, vilket visar att $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ är linj. beroende.

OBS: villkoret i (i) är ekvivalent med att $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_p \\ | & & | \end{pmatrix}$ har övre trappstegsform och $a_{ii} \neq 0$ för alla $i \in \{1, \dots, p\}$.

Lemma 7.3 En matris i trappstegsform är kolonnerna som innehåller pivålement linjärt oberoende och en bas för kolonnrummet.

Beris: $G = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ * & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\} k \right.$ Säg G är av form $n \times p$ och har $k \leq \min(n, p)$ pivåkolonner, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$. Då innehåller raderna $k+1, \dots, n$ bara nollor.

kolonnerna som motsvarar pivåvariabler, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$, är linj. oberoende enligt **Lemma 7.2 (i)**.

Vidare gäller $\vec{e}_1 \in \text{span}(\vec{u}_1)$, $\vec{e}_2 \in \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\dots$, $\vec{e}_k \in \text{span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ och för en godtycklig kolonn $\vec{g}_j$ av G : $\vec{g}_j \in \text{span}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$, då koordinaterna $k+1, \dots, n$ är lika med 0 i $\vec{g}_j$. $\square$.

OBS.: Tillsammans med **Lemma 7.2 (ii)** följer $\text{rang}(G) = k$.

Låt oss kalla maximala antalet linjärt oberoende rader i A som $\text{radrang}(A)$.

$$\Rightarrow \text{radrang}(A) = \text{rang}(A^T).$$

Lemma 7.4 (i) Under Gauss-eliminationen ändras inte radrangén av en matris.

(ii) För en trappstegsmatris G är $\text{radrang}(G) = \text{rang}(G)$

Beris: (i) Eftersom de nya raderna i varje steg av Gauss-eliminationen är linjärkombinationer av de gamla och tvärtom, gäller enligt **Lemma 7.2 (ii)** $\text{radrang}(A) \geq \text{radrang}(G)$ och $\text{radrang}(G) \geq \text{radrang}(A)$.

(ii) Som redan observerat är i en trappstegsmatris av form $n \times p$ med $k \leq \min(n, p)$ pivåkolonner, raderna $k+1, \dots, n$ nollrader.

$$\Rightarrow \text{radrang}(G) \leq k \stackrel{\text{OBS. ovan}}{=} \text{rang}(G)$$

Å andra sidan ökar antalet inledande nollor i varje rad av G bland de första k rader och med samma argument som i **Lemma 7.2 (i)** ser man att dessa måste vara linjärt oberoende, dvs. $\text{radrang}(G) \geq k$. $\square$.

Sammantaget ger **Lemma 7.4** och **Sats 7.7**:

Sats 7.8 För varje matris A gäller $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$

Beris: Låt G vara en ekvivalent trappstegsmatris till A .

$$\Rightarrow \text{rang}(A) \underset{\text{Sats 7.7}}{=} \text{rang}(G) \underset{\text{Lemma 7.4 (ii)}}{=} \text{radrang}(G) \underset{\text{Lemma 7.4 (i)}}{=} \text{radrang}(A) = \text{rang}(A^T). \quad \square$$

Def. 7.5: Mängden av alla lösningar till det homogena systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ kallas **nollrummet** av matrisen A , det maximala antalet linjärt oberoende lösningar **nolldimensionen** av A .

Sats 7.9 (Dimensionssatsen)

Om matrisen A har n kolonner, gäller
 $\text{rang}(A) + \text{nolldimension}(A) = n$.

- Beris:
- Sats 7.7 tillsammans med Lemma 7.3 ger att $\text{rang}(A) = \text{rang}(G) = \#$ pivå variabler, där G är en ekvivalent matris i trappstegsform till A .
 - I $G\vec{x} = \vec{0}$ ger varje fri variabel upphov till en parameter och den allmänna lösningen är $\vec{x}_h = t_1 \vec{u}_1 + \dots + t_k \vec{u}_k$, där $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ är parametrarna och $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ lösningar till $G\vec{x} = \vec{0}$.
 Därför att $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ uppfyller villkoret av Lemma 7.2(i), med avseende på koordinaterna som motsvarar fria variabler, är dessa linjärt oberoende och därmed en bas till nollrummet. Vi kan dra slutsatsen att $\text{nolldimension}(A) = \#$ fria variabler, alltså
 - $\text{rang}(A) + \text{nolldimension}(A) = \#$ pivå variabler + $\#$ fria variabler = $\#$ okända = n . $\square$

Ex.: bestäm baser till kolonn- och nollrummet av $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Vi har tidigare sett att $\text{rang}(A) = 2$.

$\Rightarrow$ därför att $\text{rang}(A) = 2$ och inga två kolonner i A är linj. beroende kan vi välja vilka två kolonner som helst som bas av kolonnrummet
 t.ex. $\{\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ är en bas till kolonnrummet. *fri variabel: x_3*

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x_3 = t \Rightarrow x_2 = t, x_1 = -3t$$

$$\vec{x}_h = t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dvs. } \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ är en bas till nollrummet.}$$