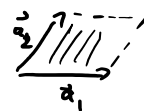


8 Determinanter

8.1 Determinanter för 2x2 och 3x3 matriser

Def. 8.1 För matrisen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definieras vi dess determinant som $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.
Ibland skrivs $\det(A)$ som $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ eller $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ istället. (kolonner i A)



- OBS:
- Area av parallelogrammet som spänns upp av $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ och $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ ges av $A_{\square} = |a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}|$
 - $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ (också när minst en av dem är 0, vilket ingår i "||")
 - $\det(A) = \begin{cases} +A_{\square} & \text{om } \vec{a}_1, \vec{a}_2 \text{ är positivt orienterade} \\ -A_{\square} & \text{om } \vec{a}_1, \vec{a}_2 \text{ är negativt orienterade} \end{cases}$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 6 \cdot 8 - 2 \cdot (-1) = 50$. Minnesregel: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (minnesregel: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ med tecken + och -)

Def. 8.2 För matrisen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definieras vi dess determinant som $\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$.
Ibland skrivs $\det(A)$ som $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ eller $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ istället. (kolonner i A)

- OBS:
- Minnesregel $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (minnesregel: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ med tecken +, -, +)
 - Igen ges volymen av parallelepipederna som spänns upp av $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ av $V = |(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3| = |\det(A)|$ (jfr. med Sats 4.3)
och $\det(A) = \begin{cases} +V & \text{om } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ är positivt orienterade} \\ -V & \text{om } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ är negativt orienterade} \end{cases}$
 - $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ligger i samma plan.

Sats 8.1 För $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eller $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gäller $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ kolonnerna av A är linjärt oberoende.

Beris: OBS. ovan och efter Def. 7.2. □.

OBS: • Detta skulle kunna läggas till Sats 7.6 som ekvivalent villkor, i alla fall för $n=2,3$:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverterbar $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

- Om man undersöker när en 2x2 (eller 3x3) matris är inverterbar:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ a_{11} y_2 - a_{21} y_1 \end{pmatrix}$$

om $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \vec{0}$ är matrisen definitivt inte inverterbar (kolonner linjärt beroende)

om antingen a_{11} eller $a_{21} \neq 0$ går $A\vec{x} = \vec{y}$ att lösa för alla högerled $\vec{y} = (y_1, y_2)$

bara om $a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21} \neq 0$ (annars kan vi skapa en motsägelse med rätt val $\vec{y}$).

- Undersöker man istället när $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ och $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ är linjärt beroende

(alltså parallella) är det när 1) $\vec{a}_1 = \vec{0}$ eller 2) det finns $c \in \mathbb{R}$ så att $\vec{a}_2 = c \cdot \vec{a}_1$.

I första fall är $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = 0$, i andra $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = a_{11} \cdot c a_{21} - c a_{11} \cdot a_{21} = 0$.

Beräkning av en determinant

Ex.: Beräkna $\det(A)$ för $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot (-1) \\ = 0 + 4 + 0 - 12 + 2 - 0 \\ = -6$$

$\Rightarrow A$ är inverterbar, då $\det(A) \neq 0$.

- Bestäm beroende på $a \in \mathbb{R}$ antalet lösningar till systemet

$$\begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ ax - 2ay + z = 2 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \quad \text{koeficientmatrisen } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -2a & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -2a & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2a) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-a) \cdot a \cdot 2 - 1 \cdot (-2a) \cdot (-a) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - (-2) \cdot a \cdot 2 \\ = 4a + 2 - 2a^2 - 2a^2 - 2 + 4a = 4a(2-a)$$

$a \notin \{0, 2\} \Rightarrow \det(A) \neq 0$ dvs. A är inverterbar och det finns därför en entydig.

Lösning.

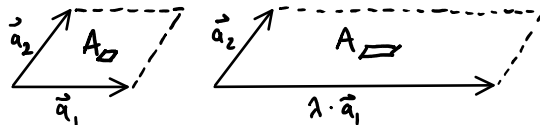
- $a = 0$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$ alltså lösning saknas

- $a = 2$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 2 & -4 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & -8 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ dvs. oändligt många lösningar.

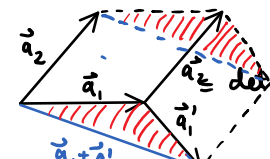
8.2 Egenskaper av determinanten

2x2 matriser

Genom tolkning som area av parallelogrammet som spänns upp av kolonnerna i $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eller direkt beräkning ur definitionen ser man att $\det(A) =: \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ är linjär i varje kolonn:

- 
 $A_{\square} = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ $A_{\square'} = \det(\lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2) = \lambda \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$

$$\det(\lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ = \lambda(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) = \lambda \cdot \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

- 
 $\det(\vec{a}_1 + \vec{a}_1', \vec{a}_2) = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \det(\vec{a}_1', \vec{a}_2)$

$$\det(\vec{a}_1 + \vec{a}_1', \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11}' & a_{12} \\ a_{21} + a_{21}' & a_{22} \end{vmatrix} \\ = (a_{11} + a_{11}')a_{22} - (a_{21} + a_{21}')a_{12} \\ = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + a_{11}'a_{22} - a_{21}'a_{12} = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \det(\vec{a}_1', \vec{a}_2)$$

Sammanfattning: $\det(\lambda(\vec{a}_1 + \vec{a}_1'), \vec{a}_2) = \lambda \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \lambda \det(\vec{a}_1', \vec{a}_2)$

OBS.: $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = -\det(\vec{a}_2, \vec{a}_1)$ [jfr. orientering eller $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$]

Med det får vi linjariteten direkt i andra kolonnen.

$\det I = \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \text{area av kvadraten } [0,1] \times [0,1] = 1$ eller $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

3x3 matriser

Genom tolkning som volym, eller direkt beräkning ser man att

$$\left. \begin{aligned} \det(\lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) &= \lambda \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ \det(\vec{a}_1 + \vec{a}_1', \vec{a}_2, \vec{a}_3) &= \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + \det(\vec{a}_1', \vec{a}_2, \vec{a}_3) \end{aligned} \right\} \text{linjäritet i en kolumn}$$

och $\det I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ gäller även för 3x3 matriser.

Sats 8.2 För 2x2 och 3x3 matriser gäller

- (a) Determinanten är linjär i varje kolumn.
- (b) Determinanten är noll om två kolumner är lika.
- (c) Determinanten av enhetsmatrisen är lika med 1.

Beris: (a) och (c) har vi redan sett.

(b) följer antingen ur direkt beräkning eller ifrån observationen efter Sats 4.3: arean/volymen som två/tre vektorer i $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ spänner upp är 0 om de är linjärt beroende. $\square$

OBS: • Man kan använda (a), (b), (c) för att entydigt definiera determinanten.

$$\bullet \det(\lambda A) = \begin{cases} \det(\lambda \vec{a}_1, \lambda \vec{a}_2) = \lambda^2 \cdot \det(A) & A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \det(\lambda \vec{a}_1, \lambda \vec{a}_2, \lambda \vec{a}_3) = \lambda^3 \det(A) & A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \end{cases} \text{ om } !$$

Lemma 8.1 (i) Om man byter plats på två kolumner ändras determinanten tecken.
(ii) Om man adderar en multipel av en kolumn till en annan kolumn ändras determinanten inte.

Beris: (i) självklart med vår kunskap om orientering (byter man plats på två vektorer ändrar man positivt orienterade till negativt orienterade och tvärtom), men följer också direkt ur Sats 8.2 (b):

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_3) \stackrel{\text{linj.}}{=} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_3) + \det(\vec{a}_2, \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ &\stackrel{\text{linj.}}{=} \cancel{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_3)} + \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + \cancel{\det(\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3)} + \cancel{\det(\vec{a}_2, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} \Rightarrow \det(\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3) \\ &= -\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ \text{(ii)} \quad \det(\vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2, \vec{a}_2, \vec{a}_3) &= \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + \lambda \det(\vec{a}_2, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ &= \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \quad \square \end{aligned}$$

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ alltså $\vec{b}_3 = \vec{a}_3 + 3\vec{a}_1$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot (-4) - 3 \cdot 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \cdot 2 = -5$$

$$\det(B) = 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot 2 = -5$$

Determinanten av transponat

$$2 \times 2: \det(A^T) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A)$$

$$3 \times 3: \det(A^T) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} = \det(A) \quad (\text{jfr. Def. 8.2})$$

Sats 8.3 För $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eller $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ gäller $\det(A) = \det(A^T)$.

Denna sats verkar inte så spektakulär, men har en hel rad konsekvenser:
 Allt vi visade för determinanter via kolonner stämmer för rader också, alltså

- $\det(A)$ är linjär i varje rad
- $\det(A) = 0$ om två rader är lika
- $\det(A)$ byter tecken när två rader byter plats
- $\det(A)$ ändras inte om en multiplik av en rad adderas till en annan
- att kolonnerna i A är linjärt oberoende om och endast om raderna är det

vet vi ifrån $\text{rang}(A) = \text{radrang}(A)$, men nu kan vi visa det också på följande sätt:
 kolonner i A är linjärt oberoende $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ ^{Sats 8.1}
^{Sats 8.3} $\Leftrightarrow \det(A^T) \neq 0$ ^{Sats 8.1} $\Leftrightarrow$ kolonnerna i A^T är linjärt oberoende.
 = rader i A

Produktregeln

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= \cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + \cancel{a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + \cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}} - \cancel{a_{21}b_{11}a_{11}b_{12}} - \cancel{a_{22}b_{21}a_{11}b_{12}} - \cancel{a_{21}b_{11}a_{12}b_{22}} \\ &\quad - \cancel{a_{22}b_{21}a_{12}b_{22}} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \det(A) \cdot \det(B). \end{aligned}$$

Det samma gäller för 3×3 matriser, alltså:

Sats 8.4 För $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eller $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ gäller $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

OBS: • Ur Sats 8.4 följer direkt, att för inverterbar matris A :

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.$$

Beris: $AA^{-1} = I$ ^{Sats 8.4} $\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$ ^{Sats 8.1} $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ ^{$\det(A) \neq 0$}

! symmetri: $\det(A) \neq 0$ om A är inverterbar (faktiskt om och endast om).

- om Q är en ortogonal matris, alltså $Q^T = Q^{-1}$, följer:

$$\frac{1}{\det(Q)} = \det(Q^{-1}) = \det(Q^T) \stackrel{\text{Sats 8.3}}{=} \det(Q) \Rightarrow \det(Q) = \pm 1.$$

Exempel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ har inversen $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(jfr. exemplet innan Sats 6.6)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 10 + 9 - 0 - 4 = -2$$

$$\det(-2A^{-1}) = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -12 + 14 - 6 - 12 + 6 + 14 = 4$$

$$\det(A^{-1}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \det(-2A^{-1}) = -\frac{1}{8} \cdot 4 = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\det(A)}.$$