

## 6.3 Cramers regel

Med hjälp av determinanten kan vi uttrycka lösningarna till ett linjärt ekvationssystem med inverterbar koefficientmatris  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  på följande sätt:

### Sats 8.5 (Cramers regel)

Om  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  och  $\det(A) \neq 0$ , så har  $A\vec{x} = \vec{y}$  den entydiga lösningen

$$x_1 = \frac{\det(\vec{y}, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1, \vec{y}, \vec{a}_3)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{y})}{\det(A)}.$$

OBS: • Motsvarighet gäller för  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  för godtyckligt  $n \in \mathbb{N}$  (dock har vi ännu inte kikad på determinanter av matriser större än  $3 \times 3$ ).

• För  $n=2$  blir det  $x_1 = \frac{\det(\vec{y}, \vec{a}_2)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1, \vec{y})}{\det(A)}.$

Bevis: Från Sats 8.1 / Sats 7.6 vet vi att  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$  inverterbar  $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{y}$  har entydig lösning. Vidare följer  $\vec{y} = A\vec{x} \stackrel{\text{Sats 6.2}}{=} x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3.$

$$\det(\vec{y}, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \det(x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \det(x_1 \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + \det(x_2 \vec{a}_2, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + \det(x_3 \vec{a}_3, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

$$= x_1 \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + x_2 \det(\vec{a}_2, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + x_3 \det(\vec{a}_3, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\det(\vec{y}, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}. \quad \text{Samma beräkning för } \det(\vec{a}_1, \vec{y}, \vec{a}_3) \text{ och } \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{y}) \text{ ger motsvarande uttrycke för } x_2 \text{ resp. } x_3. \quad \square.$$

Ex. i •  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ , alltså  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -2.$

$\Rightarrow$  den entydiga lösningen till  $A\vec{x} = \vec{y}$ , där  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ges av

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} \cdot \det(\vec{y}, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot (10 + 3 + 4) = -\frac{17}{2} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} \cdot \det(\vec{a}_1, \vec{y}, \vec{a}_3) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} (2 + 2 + 6) = -5 \\ x_3 &= -\frac{1}{2} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{y}) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} (3 - 12 + 10 - 4) = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \vec{x} = \begin{pmatrix} -17/2 \\ -5 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

• bestämt lösningar till följande ekv. system för fall då  $A$  är inverterbar:

$$\begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ ax - 2ay + z = 2 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -2a & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \det(A) = 4a(2-a) \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{0, 2\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{4a(2-a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & -2a & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{4a + 2 - 4a - 2a^2 - 2 + 8}{4a(2-a)} = \frac{2+a}{2a} \\ y &= \frac{1}{4a(2-a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-4 + 1 - a^2 + 2a - 1 + 2a}{4a(2-a)} = \frac{a-2}{4a} \\ z &= \frac{1}{4a(2-a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & -2a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-2a + 4 + 2a + 2a - 4 - 2a}{4a(2-a)} = 0 \end{aligned} \right\} (x, y, z) = \frac{1}{4a} (4+2a, a-2, 0)$$

OBS: I många fall är det krångligare att lösa  $3 \times 3$  ekv. system med Cramer i stället för Gausselimination, men om en obekant parameter finns med är det ofta tvärtom.

## 6.4 Utveckling efter rad/kolumn, underdeterminanter och större matriser

Vi vill nu utveckla ett sätt att definiera  $3 \times 3$  determinanter med hjälp av  $2 \times 2$  determinanter och använda samma sammanhang mellan determinant och matrisens så kallade underdeterminanter för att utöka definitionen till större  $n \times n$  matriser ( $n \geq 4$ ).

Def. 8.3 För en kvadratisk matris  $A$  definieras i **underdeterminanterna**  $D_{ij}$ , som determinant av matrisen som kvarstår när man stryker rad  $i$  och kolumn  $j$  i matrisen  $A$ .

Ex:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3,$   
 $D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6.$

Genom en enkel men tråkig beräkning (s. 166 i boken) inser man att det gäller för godtycklig  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ :  $\det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$   
 $= a_{11} \cdot D_{11} - a_{12} \cdot D_{12} + a_{13} \cdot D_{13}.$

Detta kallas **utveckling efter första rad**.

- Med egenskapen att determinanten byter tecken när vi byter två rader följer

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \left( a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right)$$

$$= -a_{21} D_{21} + a_{22} D_{22} - a_{23} D_{23}$$

- Med hjälp av **Sats 8.3** [ $\det(A) = \det(A^T)$ ] följer:

$$\det(A) = \det(A^T) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} D_{11} - a_{21} D_{21} + a_{31} D_{31}.$$

$\text{Sats 8.3} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_{11} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = D_{21} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = D_{31}$

Sammantaget kan vi utveckla efter valfri rad/kolumn, så länge vi håller oss till följande teckenschema:  $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$

Ex.:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

utveckling efter andra rad:  $\det(A) = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14 + 12 = -2$   
 — " — tredje kolumn:  $\det(A) = +(-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$

I princip kan man utveckla en  $2 \times 2$  matris också (tecken  $\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$ ),

t.ex.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12} = 1 \cdot \underbrace{\det(4)}_{=4} - 2 \cdot \underbrace{\det(3)}_{=3} = -2$

men det är nog onödigt krångligt.

När vi däremot vill definiera determinanten för  $n \times n$  matriser där  $n \geq 4$  använder vi detta rekursiva sammanhang:

Def. 8.4 Determinanten av  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definieras som

$\det(A) = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} D_{1n}$  (utveckling efter första raden),  
där  $D_{ij}$  är determinanten av  $(n-1) \times (n-1)$ -matrisen som uppstår när man stryker rad  $i$  och kolumn  $j$  i matrisen  $A$ .

Observera att vi definierar rekursivt, dvs.  $\det(A)$  för  $A \in \mathbb{R}^{17 \times 17}$  med hjälp av determinanten för  $16 \times 16$  matriser osv.

Vi kan lika bra utveckla efter en annan rad än första

och tecken schemat för godtycklig dimension  $n$  blir:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & + & - & + \end{vmatrix}$$

Den här rekursiva definition gör att egenskaperna vi fick fram för  $2 \times 2$  och  $3 \times 3$  matriser går "i arv" till större determinanter:

- 1) Determinanten är linjär i varje kolumn (bevis: induktivt).
- 2) Om två kolumner är lika, så är determinanten noll (induktivt).
- 3) Determinanten av enhetsmatrisen är lika med 1 (induktivt).
- 4) Om vi byter plats på två kolumner så ändras determinanten tecken (ur 1) och 2).
- 5) Determinanten ändras inte, om man adderar en multipel av en kolumn till en annan (ur 1) och 2).
- 6) Determinanten är linjär i varje rad (induktivt).
- 7) Om två rader är lika, så är determinanten noll (utveckling efter annan rad, induktivt).
- 8) Om vi byter plats på två rader så ändrar determinanten tecken (ur 6) och 7).
- 9) Determinanten ändras inte, om man adderar en multipel av en rad till en annan (ur 6) och 7).

OBS: Att vi kan välja rad för utveckling samt 9) kan användas för att förenkla beräkningen avsevärt!  
Annars blir det snabbt väldigt många underdeterminanter.

Ex.: Beräkna determinanten av  $5 \times 5$  matrisen  
Vi lägger 2 gånger första rad till sista:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{utveckla efter sista raden}} -1 \cdot D_{54}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{utveckla efter andra raden}} - \left[ -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \right]$$

$$= (3 + 30 + 4 - 18) - 5(-4 + 4 + 45 + 6 + 5 + 24) = 19 - 5 \cdot 80 = -381 \neq 0$$

- OBS ∴ Som redan nämnt definieras egenskaperna 1), 2) och 3) determinanten entydigt i godtyckligt dimension  $n$  (utan bevis).
- Genom att visa att funktionen  $D: \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \det(A^T) \end{cases}$  har egenskaperna 1), 2) och 3) följer då att  $\det(A^T) = D(A) = \det(A)$  även för större matriser. Vi kan alltså utveckla efter valfri rad eller kolumn (med hänsyn till teckenschemat) och använda både 5) och 9) till förenkling innan vi beräknar en större determinant.
  - Även produktregeln gäller för godtyckligt  $n$ :  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  (utan bevis).
  - Cramers regel gäller för  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (samma bevis: ur 1) och 2))
  - För en triangulär matris är determinanten lika med produkten av alla diagonalelement (bevis: konsekvent utveckling efter sista/första raden):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -13 & -4 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ symmetri: diagonalmatriser})$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (+1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}) = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \det(1) = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

samma idé fast nu konsekvent första rad

$$\det(B) = 3 \cdot 2 \cdot 0 \cdot (-4) \cdot 5 = 0.$$

**Lemma 8.2** Om kolumnerna/raderna i  $A$  är linjärt beroende  $\Rightarrow \det(A) = 0$

Bevis, direkt ur 5) resp. 9): om  $A = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_i & \dots & \vec{a}_n \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$  och  $\vec{a}_i = c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_{i-1} \vec{a}_{i-1} + c_{i+1} \vec{a}_{i+1} + \dots + c_n \vec{a}_n$  för  $c_j \in \mathbb{R}$ .

$$\det(A) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{0}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n) \stackrel{\text{utveckla efter kolumn } i}{=} 0.$$

lägger  $-c_1 \vec{a}_1, \dots, -c_{i-1} \vec{a}_{i-1}, -c_{i+1} \vec{a}_{i+1}, \dots, -c_n \vec{a}_n$  till kolumn  $i$ .  $\square$

Ex: Är vektorena  $\vec{u}_1 = (1, -1, 3, 2, -2)$ ,  $\vec{u}_2 = (-2, 2, -1, 5, 4)$ ,  $\vec{u}_3 = (3, -2, -1, 4, -6)$ ,  $\vec{u}_4 = (0, -1, 2, 3, 1)$  och  $\vec{u}_5 = (2, 3, 0, -3, -4)$  linjärt beroende?

Låt  $A = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$ , då vet vi att  $\det(A) \neq 0$  innebär att kolumnerna  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_5$  är linjärt beroende (Lemma 8.2).

$\det(A) = -381 \neq 0$ , dvs.  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_5$  är linj. beroende.

### Def. 8.5 (Adjunkt)

För en matris  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ges den så kallade adjunkten av

$$\text{adj}(A) := \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{21} & D_{22} & -D_{23} \\ D_{31} & -D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & D_{31} \\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32} \\ D_{13} & -D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}.$$

Samma mönster,  $(D_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$  försett med tecken ur teckenschemat och transponerat, ges adjunkten till en godtycklig matris  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Sats 8.6** Låt  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  så att  $\det(A) \neq 0$ .

Då är  $A$  inverterbar och  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ .

Bevis: Vi undersöker fallet  $n=3$ , men argumentet fungerar för godtyckligt  $n \in \mathbb{N}$ !

Låt  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ . Om vi beräknar  $B = A \cdot \text{adj}(A)$ , så får vi t.ex.

$$b_{11} = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12} + a_{13} D_{13} = \det(A) \quad (\text{utveckling efter första rad})$$

$$b_{22} = -a_{21} D_{21} + a_{22} D_{22} - a_{23} D_{23} = \det(A) \quad (\text{utveckling efter andra rad})$$

$$b_{12} = -a_{11} D_{21} + a_{12} D_{22} - a_{13} D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{två lika rader})$$

Samma beräkningar  
=> för respektive element  
A kvadratisk  
=>  $B = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$  är högerinvers till  $A$ .  
Sats 6.5 högerinvers är inversen och  $A$  inverterbar.  $\square$

Ex.: Beräkna adjunkten och inversen till  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , där  $ad-bc \neq 0, \dots$

$$\text{adj}(B) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B) = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$\text{och } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}: D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3, D_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, D_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -7, D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4, D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1, D_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3, D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \det(A) = D_{11} + 2D_{12} - D_{13} = -2, \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

OBS.: Sats 7.6 och Lemma 8.2 ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inte inverterbar  $\Leftrightarrow$  kolonnerna i  $A$  är linjärt beroende  $\Rightarrow \det(A) = 0$ ) eller Sats 8.6 ger:

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$  inverterbar.

1), 4) och 5) (Gausselimination av  $A$  leder till trappstegsmatrisen  $G$

$\Rightarrow \det(A) = c \cdot \det(G)$  för något  $c \neq 0$ ) och observationen om triangulära matriser

( $\det(G)$  = produkten över diagonalen) implicerar

$A$  inverterbar  $\Leftrightarrow G$  har  $n$  pivärelement  $\Rightarrow \det(G) \neq 0 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ .

Genom att föra båda ihop ser vi att resultatet av Sats 8.1

[ $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$  inverterbar] gäller även för  $n > 3$ .