

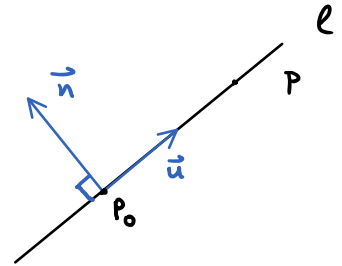
Normalformen (för linjer i $\mathbb{R}^2$ och plan i $\mathbb{R}^3$)

Istället för att definiera en linje genom en stödpunkt och en riktning(svektor) [eller alternativt: två punkter] kan vi i planet utöver stödpunkten ange en vektor $\vec{n}$ som är ortogonal (dvs. vinkelrät) mot linjen.

En sådan kallas normalvektor till linjen.

OBS.: Om vi bortser från längd och orientering bestämmer $\vec{n}$ riktningssvektorn $\vec{u}$ och tvärvärdet.

MEN BARA I TVÅ DIMENSIONER



$$P \in l \Leftrightarrow \vec{P_0P} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \vec{P_0P} \perp \vec{n}$$

med $P_0: (x_0, y_0)$, $P: (x, y)$ och $\vec{n} = (a, b)$ fås

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0 \Leftrightarrow$$

linjens ekvation på normalform

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow$$

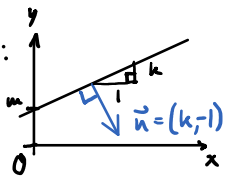
$$ax + by + c = 0$$

där $c = -(ax_0 + by_0)$

OBS.: Trots att även normalformen inte är unik (gånger ekvationen med ett tal $\neq 0$) kan man direkt avläsa en normalvektor (då dess koordinater motsvarar koefficienterna framför variablerna)

• Den kända formen $y = kx + m$ är linjens ekvation på normalform, nästan:

$\Leftrightarrow kx + (-1)y + m = 0$ dvs. $\vec{n} = (k, -1)$ är en normalvektor



Exempel: • en ekvation till linjen genom $P: (1, 3)$ och $Q: (2, 5)$ på normalform
• är $\vec{u}_1 = (-1, 1)$ parallel med linjen, ligger $R: (-1, -1)$ på linjen?

• $\vec{u} = \vec{PQ} = (2, 5) - (1, 3) = (1, 2)$ är en riktningssvektor

$\vec{n} = (2, -1)$ kan tas som normalvektor

$$l: (x - 1, y - 3) \cdot (2, -1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$$

är en ekvation i normalform för l .

• $R \in l$? $2 \cdot (-1) - (-1) + 1 = 0$ alltså $R \in l$

• $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = (2, -1) \cdot (-1, 1) = -1 \neq 0$ alltså $\vec{u}_1 \nparallel l$.

Parameterform $\rightarrow$ normalform

$$l: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Strategi: Lösa ut t sätt lika

$$x (= t) = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$$

normalform $\rightarrow$ parameterform

$$3x + y - 7 = 0$$

Strategi: Sätt $x = t$ och räkna ut y

$$y = 7 - 3t$$

$$l: \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \left[\begin{array}{l} \text{alltså: } P_0: (0, 7), \\ \vec{u} = (1, -3) \end{array} \right]$$

koordinataxlar: y -axeln: $x = 0 \Leftrightarrow (x, y) \cdot (1, 0) = 0$

$\vec{e}_1$ är en normalvektor till y -axeln

x -axeln: $y = 0 \Leftrightarrow (x, y) \cdot (0, 1) = 0$
 $\vec{e}_2$ är en normalvektor till x -axeln

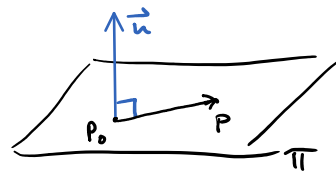
I tre dimensioner kan vi på samma sätt ange en normalvektor $\vec{n} \neq 0$ till ett plan π , i meningen att givet $P_0 \in \pi$ gäller

$$P \in \pi \Leftrightarrow \vec{P_0P} \perp \vec{n}$$

Med $P: (x, y, z)$, $P_0: (x_0, y_0, z_0)$ och $\vec{n} = (a, b, c)$ fås

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad [\text{där } d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)]$$



Planets equation i normalform. Återigen kan man avläsa $\vec{n}$ som koefficienter framför variablerna.

Ex.: Ge en equation till π i normalform, där $P_0: (1, 2, 1) \in \pi$ och $\vec{n} = (1, -2, -1)$.
Är $\pi_1: -2x + 4y + 2z + 5 = 0$ parallel till π ?

$$\pi: 1(x - 1) + (-2)(y - 2) + (-1)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - z + 4 = 0$$

π har normalvektor $(1, -2, -1)$ och π_1 har normalvektor $(-2, 4, 2) = -2(1, -2, -1)$
 $\Rightarrow$ normalvektorerna är parallella och därmed också $\pi \parallel \pi_1$.

Normalform $\rightarrow$ Parameterform

$$2x + 2y + z - 5 = 0$$

strategi: sätt $x = s$, $y = t$, räkna ut z

$$z = 5 - 2s - 2t$$

$$\pi: \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 5 - 2s - 2t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

$$P_0: (0, 0, 5), \vec{u} = (1, 0, -2), \vec{v} = (0, 1, -2)$$

Parameterform $\rightarrow$ normalform

$$P: (1, 1, 1), Q: (2, 1, 3), R: (3, 2, -5) \in \pi$$

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 1 - 2s + t \\ z = 1 + 2s - 6t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = (1, -2, 2), \vec{v} = (2, 1, -6)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (12 - 2, 4 + 6, 1 + 4) = (10, 10, 5)$$

$$= 5 \cdot (2, 2, 1)$$

$$\pi: 2x + 2y + z - 5 = 0$$

beräknas lättast med hjälp av en punkt i π (sätt in dess koordinater)

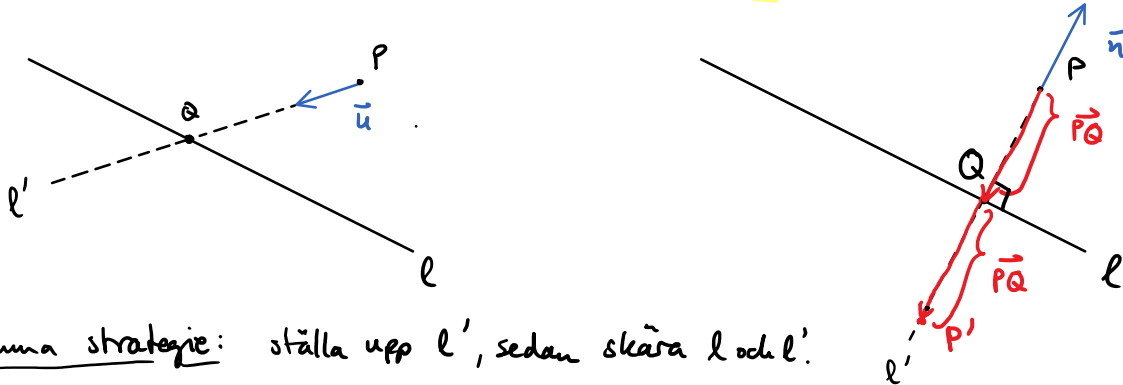
OBS: • kryssprodukten är som skräddarsydd när man har två vektorer i $\mathbb{R}^3$ och vill ta fram en tredje $\neq 0$ som är vinkelrät mot båda:
Dvs. om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är riktningsvektorer som spänner upp ett plan, så är $\vec{u} \times \vec{v}$ en normalvektor till planet.

• Mycket lättare att avgöra utifrån normalformen om plan är parallella eller om en punkt ligger i planet (bara sätta in koordinaterna och kontrollera!).

• För linjer i $\mathbb{R}^3$ finns det ingen normalvektor och därmed ingen normalform.

4.3 Projektion och spegling

projektion i två dimensioner: av en punkt P på en linje l
snett (längs en given riktning $\vec{u}$) eller ortogonalt (längs $\vec{n}$)



Samma strategi: ställa upp l' , sedan skära l och l' .

Ex.: $l: x + 2y = 0$, $P: (1, 3)$, $\vec{u} = (2, 1)$

Stell upp ℓ' : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Skära l och l' : Sätt in $(1+2t, 3+t)$
som är en godtycklig punkt på l i ekvationen
för l' och lös ut t : 7

$$Q: (1 + 2(-\frac{7}{4}), 3 + (-\frac{7}{4})) = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{4})$$

eller orthogonal projection:

$\vec{n} = (1, 2)$ är en normalvektor till l

$$e': \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Skāra l, l' : $(1+t) + 2(3+2t) = 0$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{7}{5}$$

$$Q: (1 + (-\frac{7}{5}), 3 + 2(-\frac{7}{5})) = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$$

För spegling (ortogonalt) lägger vi bara till samma differens: $\vec{PP'} = 2 \cdot \vec{PQ}$
och får som speglingsspelet av P med avseende på l : $P': \vec{OP'} + 2 \vec{PQ} = (1, 3) + 2(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5} - 3) = (-\frac{9}{5}, -\frac{13}{5})$.

Projektion i tre dimensioner av en punkt på ett plan, antingen snett (längs en given riktning $\vec{u}$) eller ortogonalt (längs normalvektorn till planet) följer samma strategi: Ställ upp L' och beräkna var ligger planet (och ev. speglingen):

Ex.: Vilken punkt Q är den ortogonala projektionen av $P: (1, 2, 2)$ på planet

$$\pi: x + y - z + 1 = 0.$$

Vilken punkt P' är speglingen av P i planet π ?

$\vec{n} = (1, 1, -1)$ kan avläsas vara en normalvektor till π .

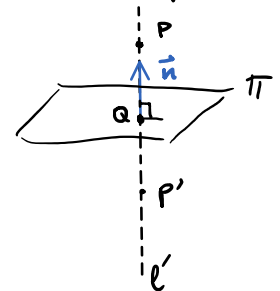
$\ell': (x, y, z) = (1, 2, 2) + t(1, 1, -1)$ ska skäras med Π

sätta in i normalformen för π : $(1+t) + (2+t) - (2-t) + 1 = 0$

$$Q: (1, 2, 2) + \left(-\frac{2}{3}\right)(1, 1, -1) \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right); \quad \vec{PQ} = \left(-\frac{2}{3}\right)(1, 1, -1) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$P': \underbrace{(1, 2, 2)}_{\vec{OP}} + 2 \cdot \underbrace{\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{\vec{PQ}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

oder $p': (1, 2, 2) + 2 \cdot \underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)}_{\substack{\text{+ kein} \\ \text{oben}}} (1, 1, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$.



OBS.: När det gäller ortogonal projektion / spegling med avseende på en linje l ger oss skalärprodukten ytterligare ett sätt att beräkna Q resp. P' :

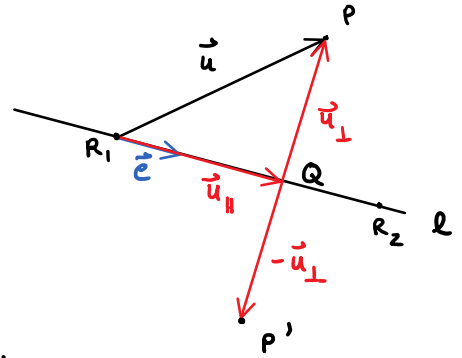
Strategi: ta fram två punkter R_1, R_2 på l och sedan en normerad riktningsvektor $\vec{e}$, t.ex. $\vec{e} = \frac{\vec{R_1 R_2}}{\|\vec{R_1 R_2}\|}$.

Sätt $\vec{u} = \vec{R_1 P}$,

beräkna $\vec{u}_{||} = (\vec{u} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{e}$ och $\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{||}$.

Sedan ges den ortogonala projektionen av P på l av

$Q: \vec{O\vec{P}} - \vec{u}_{\perp}$ och speglingen av P : $\vec{O\vec{P}} - 2\vec{u}_{\perp}$.



Gäller det en linje i $\mathbb{R}^3$ (ingen normalform), är det det enklaste sättet som finns!

Med hjälp av en ortogonal projektion är det dessutom lätt att räkna ut avståndet av en punkt P till en linje / ett plan, då den ortogonala projektionen (punkten Q) ligger närmast P .

Ex.: Beräkna avståndet av $P: (3, -1, 4)$ till planet

$$\pi: x - y + z + 1 = 0.$$

$\vec{n} = (1, -1, 1)$ är en normalvektor till π

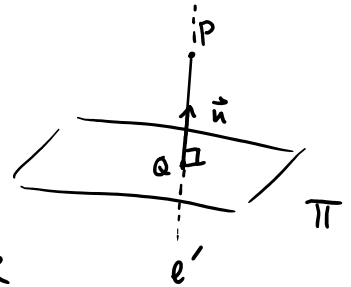
$$l': (x, y, z) = \vec{O\vec{P}} + t \cdot \vec{n} = (3, -1, 4) + t(1, -1, 1), t \in \mathbb{R}$$

$$l' \cap \pi \text{ i punkten } Q: (3+t) - (-1-t) + (4+t) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t = -9 \Leftrightarrow t = -3$$

$$Q: (3, -1, 4) + (-3)(1, -1, 1) = (0, 2, 1)$$

$$\text{avståndet av } P \text{ till } \pi \text{ ges då av } \|\vec{PQ}\| = \|(-3, 3, -3)\| = 3\sqrt{3}.$$



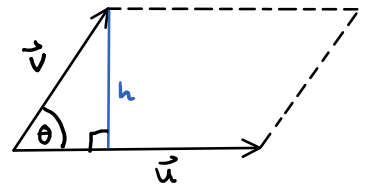
4.4 Area och volym

Area:

Två vektorer $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ (som är icke-parallella) spänner upp ett parallelogram i $\mathbb{R}^3$.

Dess area är basen multiplicerad med höjden:

$$A = b \cdot h = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$$

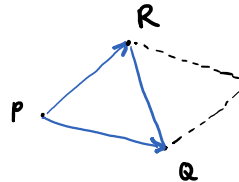


Sats 4.1 Area av parallelogrammet som $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ spänner upp ges av $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$. (jfr. Sats 3.2)

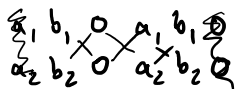
Ex.: bestäm triangelns area med hörn P: (1,1,2), Q: (2,3,0) och R: (0,3,4)

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= (1, 2, -2) \\ \vec{PR} &= (-1, 2, 2) \end{aligned} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot A_{\square} = \frac{1}{2} (\|\vec{PQ}\| \cdot \|\vec{PR}\| \cdot \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \|\vec{PQ} \times \vec{PR}\| = \frac{1}{2} \|(8, 0, 4)\| = \sqrt{20}.$$



OBS: Ligger $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tolkar vi det som xy-planet i $\mathbb{R}^3$ och beräknar arean som ovan! $\vec{u} = (a_1, b_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2)$ spänner alltså upp ett parallelogram med area $\|(a_1, b_1, 0) \times (a_2, b_2, 0)\| = \|(0, 0, a_1 b_2 - b_1 a_2)\| = |a_1 b_2 - b_1 a_2|$.



Sats 4.2 $\vec{u} = (a_1, b_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ spänner upp ett parallelogram med area $|a_1 b_2 - b_1 a_2|$.

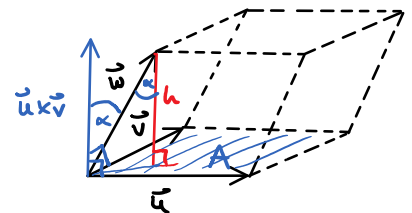
OBS: $a_1 b_2 - b_1 a_2 > 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ är positivt orienterade
 — " — $< 0 \Leftrightarrow$ — " — negativt — " —

Volym

Tre vektorer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ (som inte ligger i samma plan) spänner upp en parallelepiped (som förhåller sig till parallelogram precis som rätblock till rektangel).

Dess volym är basyta gånger höjd (som står $\perp$ på basytan).

$$V = A \cdot h = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|.$$



Sats 4.3 Parallelepipeden som spänns upp av $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ har en volym som ges av $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$.

OBS: • Vi har mött den skalära trippelprodukten $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ förut.

Att t.ex. $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |(\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}|$ gäller är nu en självklarhet, men hur är det med tecknet?

$$V = \begin{cases} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} & \text{om } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ är positivt orienterade} \\ -(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} & \text{negativt orienterade} \end{cases}$$

- $\vec{u}, \vec{v}$ i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ spänner upp ett parallelogram (med area > 0) $\Leftrightarrow \vec{u} \nparallel \vec{v}$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ spänner upp en parallelepiped (med volym > 0) $\Leftrightarrow$ ingen av vektorena är en linjärkombination av de andra två.