# ③ Vektorer och ④ geometri

$\vec v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ står för en n-dimensionell vektor.

$\vec u \parallel \vec v \iff \exists\, c \in \mathbb{R}$ så att antingen $\vec u = c\cdot\vec v$ eller $\vec v = c\cdot \vec u$. parallella

$\vec u \perp \vec v \iff \underbrace{\vec u \circ \vec v}_{\text{Skalärprodukt}} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n = 0$ rätvinkliga

$\|\vec v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ är vektorns längd; Δ-olikhet: $\|\vec u + \vec v\| \le \|\vec u\| + \|\vec v\|$

span $(\vec u_1, \dots, \vec u_k) = \{\lambda_1 \vec u_1 + \dots + \lambda_k \vec u_k \;;\; \lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}\}$ är mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna $\vec u_1,\dots,\vec u_n$ och kallas deras span.

Skalärprodukten är kommutativ, linjär i båda faktorer och distributiv, dvs.
$(\lambda\vec u + \vec v)\circ \vec w = \vec w \circ (\lambda \vec u + \vec v) = (\lambda \vec u)\circ\vec w + \vec v \circ \vec w = \lambda(\vec u\circ\vec w) + \vec v\circ\vec w$.

dessutom $\vec u\circ\vec v = \|\vec u\|\cdot\|\vec v\|\cdot\cos\theta$, där $\theta$ är minsta vinkeln mellan $\vec u$ och $\vec v$.
(kan användas för beräkning av just $\theta$).

För $\vec u,\vec v\in\mathbb{R}^3$ definieras deras kryssprodukt $\vec u\times\vec v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

minnesregel: $\begin{matrix} \cancel{u_1} & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 & \cancel{u_3} \\ \cancel{v_1} & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 & \cancel{v_3}\end{matrix}$

- $\vec u\times\vec v \perp \vec u$ och $\vec u\times\vec v\perp\vec v$, samt $\vec u,\vec v,\vec u\times\vec v$ är positivt orienterade och $\|\vec u\times\vec v\| = \|\vec u\|\cdot\|\vec v\|\cdot\sin\theta$.
- kryssprodukten är linjär i båda faktorer, distributiv och antikommutativ: $\vec u\times\vec v = -\vec v\times\vec u$.

Linjer på parameterform: $\vec p = \vec p_0 + t\cdot\vec r$; $t\in\mathbb{R}$ både i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$, där
$\vec p = (x,y,z)$, $\vec p_0 = (x_0,y_0,z_0)$ stödpunkt, $\vec r = (a,b,c)$ riktningsvektorn

på parameterfri form: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ (för $a,b,c \neq 0$; om t.ex. $a=0 \Rightarrow x = x_0$)

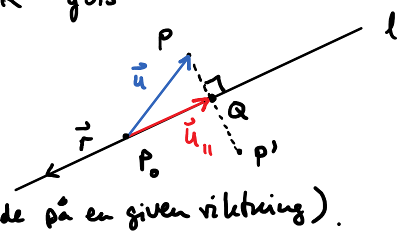
Plan på parameterform: $\vec p = \vec p_0 + s\cdot\vec u + t\cdot\vec v$; $s,t\in\mathbb{R}$, där $\vec u \nparallel \vec v \in \mathbb{R}^3$ spänner upp planet.

på normalform: $ax+by+cz-d=0$ där $\vec n=(a,b,c)$ är en normalvektor,
dvs. $\vec n\perp\vec u$, $\vec n\perp\vec v$ och $d = ax_0+by_0+cz_0$.

## Projektion och spegling

- projektion av en punkt P på en linje $\ell$ (i $\mathbb{R}^2$) eller ett plan $\pi$ (i $\mathbb{R}^3$) kan göras längs en given riktning eller ortogonalt (längs normalen)
  strategi: ställa upp en hjälplinje $\ell'$ som går genom P med projektionsriktningen och skära med $\ell$ resp. $\pi$
- Ortogonal projektion av en punkt P på en linje $\ell$ i $\mathbb{R}^3$ görs bäst med vektorprojektionen

$$\vec u_\parallel = (\vec u\circ\vec r)\cdot\frac{\vec r}{\|\vec r\|^2}$$




(den kan också vara hjälpsamt när man ska dela upp en vektor i två komposanter $\vec u = \vec u_\parallel + \vec u_\perp$ med avseende på en given riktning).

- För spegling av P i $\ell$ eller $\pi$ lägger vi enkelt till differensen till den ortogonala projektionen Q ännu en gång: $PP' = 2\,PQ$, där P' är speglingen.
- Med den ortogonala projektionen Q av P på $\ell$ eller $\pi$ får vi avståndet av P till $\ell/\pi$ som $\|PQ\|$.

## Area och volym

**Sats 4.1/4.3** För $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ i $\mathbb{R}^3$ ges arean av parallellogrammet som $\vec{u},\vec{v}$ spänner upp av $A = \|\vec{u}\times\vec{v}\|$, volymen av parallellepipeden som $\vec{u},\vec{v}$ och $\vec{w}$ spänner upp av $V = |(\vec{u}\times\vec{v})\circ\vec{w}|$.

---

**Exempel:**

1) Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.
Hitta en vektor som är vinkelrätt mot både och dela upp $\vec{u}$ i $\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$ där $\vec{u}_{\parallel} \parallel \vec{v}$ och $\vec{u}_{\perp} \perp \vec{v}$.

$\vec{u}\circ\vec{v} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 2$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{u}\circ\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \dfrac{2}{\sqrt{28}}$, $\theta \approx 67{,}8^\circ$

$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}2-0\\-3-1\\0-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$, alltså t.ex. $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ är $\perp$ mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

$\vec{u}_{\parallel} = \dfrac{\vec{u}\circ\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v} = \dfrac{\cancel{2}}{\sqrt{2}^2}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{u} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\parallel\vec{v}} + \underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}}_{\perp\vec{v}}$.

2) Vilken area har triangeln med hörn $A = (1,0,2)$, $B = (2,-4,1)$ och $C = (2,0,3)$?

$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (1,-4,-1)$ och $\vec{v} = \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (1,0,1)$ ger

$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix} \overset{\text{Sats 4.1}}{\Rightarrow} \text{Area} = \frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{36} = 3.$

$\uparrow\ \Delta = \frac{1}{2}\cdot$ ▱

3) Betrakta $P = (2,3)$ och $Q = (4,7)$. På vilken linje $\ell$ är $Q$ den ortogonala projektionen av $P$?

Uppenbarligen är vi i $\mathbb{R}^2$. Om $Q$ är den ortogonala projektionen av $P$ på sökt linje $\ell$ måste $\vec{PQ} = (2,4)$ vara $\perp$ mot dess riktningsvektor $\vec{r}$.
Alltså t.ex. $\vec{r} = (2,-1)$. Med $Q \in \ell$ får vi direkt parameterformen
$\ell: (x,y) = (4,7) + t\cdot(2,-1)$ och alternativt $\dfrac{y-7}{-1} = t = \dfrac{x-4}{2} \Leftrightarrow y = -\dfrac{x}{2} + 9$.

4) Är planet, som triangeln i ex. 2) ligger i, parallellt med $\pi: 2x + y - 2z = 4$?

Eftersom $A,B,C$ ligger i planet och $\vec{AB} \nparallel \vec{AC}$ ges den av
$\pi': (x,y,z) = \vec{OA} + t\cdot\vec{AB} + s\cdot\vec{AC} = (1,0,2) + t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$
en normalvektor är $\vec{u}\times\vec{v} = -2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ [och $\pi': 2x + y - 2z = -2$]
en normalvektor till $\pi$ är uppenbarligen $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\vec{u}\times\vec{v}$, därmed är $\pi$ och $\pi'$ parallella (dock inte identiska).

## 6 Matriser

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ kallas en matris, addition och multiplikation med tal sker elementvis.

För $A = \begin{pmatrix} - \vec{u}_1 - \\ \vdots \\ - \vec{u}_n - \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_q \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times q}$ är $AB = (\vec{u}_i \circ \vec{b}_j)_{\substack{i\in\{1,\dots,n\} \\ j\in\{1,\dots,q\}}} \in \mathbb{R}^{n\times q}$.

- Matrismultiplikation är associativ och distributiv men inte kommutativ!

Sats 6.1 $\quad AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ A\vec{b}_1 & \cdots & A\vec{b}_q \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{u}_1 B- \\ \vdots \\ -\vec{u}_n B- \end{pmatrix}$.

- För en matris $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,n\} \\ j\in\{1,\dots,m\}}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ kallas $A^T = (a_{ji})_{\substack{j\in\{1,\dots,m\} \\ i\in\{1,\dots,n\}}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dess transponat.

$\boxed{(A+B)^T = A^T + B^T,\ (A^T)^T = A,\ (AB)^T = B^T A^T}$

- En kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kallas inverterbar om det finns $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ så att $AA^{-1} = I$

Sats 6.3/6.4 Inversen är entydig, $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Beräkning: Antingen lös $A\vec{x} = \vec{y}$ för allmänt $\vec{y}$ eller överför $[A \mid I] \rightsquigarrow [I \mid A^{-1}]$ med framåt + bakåt-elimination.

- Om $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ har ortonormerade kolonner kallas den ortogonal. $Q$ ortogonal $\Leftrightarrow Q^{-1} = Q^T$

## 7 Centrala begrepp

- $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^m$ linjärt beroende om $\vec{u}_i \in \operatorname{span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)$ för något $i$ annars linjärt oberoende.

- Sats 7.1/7.2 $\quad \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^m$ linjärt oberoende

  $\Leftrightarrow x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n = \theta$ har bara den triviala lösningen $\vec{x} = \theta$

  $\Leftrightarrow$ för alla $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_n\vec{u}_n \in \operatorname{span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ är $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ entydigt bestämda.

- $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$ utgör en bas om de spänner upp $\mathbb{R}^n$ (dvs. $\operatorname{span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = \mathbb{R}^n$) och är linj. oberoende.
  (fler än $n$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linj. beroende, färre än $n$ spänner inte upp $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ alla baser till $\mathbb{R}^n$ består av exakt $n$ vektorer)

  Sats 7.5 $\quad \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$ är en bas $\Leftrightarrow$ de är linj. oberoende $\Leftrightarrow$ de spänner upp $\mathbb{R}^n$

- För $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_m \\ | & & | \end{pmatrix}$ kallas $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ kolonnrummet och det maximala antalet linj. oberoende kolonner $\operatorname{rang}(A)$.

  - Om $G$ är trappstegsekvivalent till $A$ gäller $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(G) = \#$ pivåelement
  - Sats 7.8 $\quad \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$

- $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : A\vec{x} = \theta\}$ kallas nollrummet till matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$
  det maximala antalet linj. oberoende vektorer i nollrummet $\operatorname{nolldim}(A)$.

  Dimensionssatsen (7.9) För $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gäller $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{nolldim}(A) = m$

## 5 Linjära ekvationssystem

$A\vec{x} = \vec{y}$, där $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ obekanta, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ högerled och $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ koefficient matris.

Ekv. systemet kallas
överbestämt / kvadratiskt / underbestämt om $n > m$ / $m = n$ / $n < m$
och homogent om $\vec{y} = \theta$.

- För att lösa det använder vi framåt elimination och utökad matrisnotation $[A|\vec{y}]$ (tillåtet: byta rader, gångra rader med $c \neq 0$, lägga en rad till en annan).
- Sats 5.2 Kan ha 0, 1 eller oändligt många lösningar, $\vec{x} = \theta$ löser homogena system.
- Sats 5.3 / 5.4 / 5.5
  - ett kvadratiskt system är lösbart för alla $\vec{y}$ $\Leftrightarrow$ det har entydig lösning för något / alla $\vec{y}$.
  - ett underbestämt system kan inte ha en entydig lösning
  - ett överbestämt system är inte lösbart för alla $\vec{y}$.
- Sats 5.6 Som för linjära diff. ekvationer ges den allmäna lösningen till $A\vec{x} = \vec{y}$ av $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$, där $\vec{x}_p$ löser $A\vec{x} = \vec{y}$, $\vec{x}_h$ står för alla lösningar till $A\vec{x} = \theta$.
- Om lösning till $A\vec{x} = \vec{y}$ saknas kan vi hitta en approximativ lösning med minsta-kvadrat-metoden genom att lösa normalekvationen $A^TA\vec{x} = A^T\vec{y}$
  Tillämpning: kurvanpassning om interpolation är omöjligt.
- Sats 7.6 För $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är ekvivalenta

(i) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$
(ii) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ är linj. oberoende
(iii) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$
(iv) $A\vec{x} = \vec{y}$ har entydig lösning för varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$
(v) $A\vec{x} = \vec{y}$ —— " —— något $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$
(vi) $A\vec{x} = \vec{y}$ är lösbart för varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$
(vii) A är inverterbar
(viii) rang $(A) = n$
(ix) trappstegsekv. till A har n pivå element
(x) $\det(A) \neq 0$

## 8 Determinanter

- Är definerade för kvadratiska matriser och kan beräknas genom utveckling efter rad/kolonn med hjälp av underdeterminanter och teckenschemat $\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & \vdots & \\ - & \vdots & & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$
  t.ex. $\det(A) = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}D_{1n}$
- Motsvarar arean/volymen som kolonnerna spänner upp i 2x2 / 3x3 fallet försett med tecken som motsvarar orientering

Minnesregler: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

- Determinanten är ...
  ... linjär i varje rad/kolonn
  ... 0 om två rader / kolonner är lika
  ... 1 för enhetsmatrisen I
  ... produkten över diagonalen för triangulära matriser
- Determinanten ...
  ... byter tecken när man byter plats på två rader/kolonner
  ... ändras inte om man lägger multipel av en kolonn/rad till en annan
  → kan användas till förenkling!

Sats 8.1 $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar
Sats 8.3 / 8.4 $\det(A) = \det(A^T)$, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

- **Sats 8.5** Cramers regel

$A\vec{x} = \vec{y}$ med $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ <u>inverterbar</u> har den entydiga lösningen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ där

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{y} & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{y} & \vec{a}_3 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det\begin{pmatrix} | & & | & | \\ \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{n-1} & \vec{y} \\ | & & | & | \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

(ofta smidigare än Gausselim. om obestämda koefficientes finns, annars ofta krångligare)

- adjunkten $\operatorname{adj}(A)$ är matrisen där element $(i,j)$ dvs. rad $i$, kolonn $j$ är lika med $(-1)^{i+j} D_{ji}$ och om $A$ är inverterbar gäller $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$.

---

<u>Exempel</u>: 1) Beräkna inversen till $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ och lös

$(AX + 2I)A^T = B$ för obekant $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ med $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & y_1 \\ 3 & 1 & 6 & y_2 \\ -2 & 4 & 1 & y_3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 - 3y_1 \\ 0 & 4 & 5 & y_3 + 2y_1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 - 3y_1 \\ 0 & 0 & 5 & y_3 - 4y_2 + 14y_1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{23}{5}y_1 + \frac{8}{5}y_2 - \frac{2}{5}y_3 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 - 3y_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -23 & 8 & -2 \\ -15 & 5 & 0 \\ 14 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -23 & -15 & 14 \\ 8 & 5 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(AX + 2I)A^T = B \Leftrightarrow X = A^{-1}\left(B(A^T)^{-1} - 2I\right) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -23 & 8 & -2 \\ -15 & 5 & 0 \\ 14 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -91 & -50 & 48 \\ 18 & 10 & -9 \\ -33 & -20 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2303/25 & 254/5 & -1194/25 \\ 291/5 & 32 & -153/5 \\ -1379/25 & -152/5 & 717/25 \end{pmatrix}$$

inga snygga tal... :(

2) Är $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ortogonal? Beräkna $Q^{-1}$.

med $\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\vec{q}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ser man lätt att $q_i^T \circ q_j = \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

alltså är $Q$ ortogonal. $Q^{-1} = Q^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Bestämm $\operatorname{rang}(A)$, kolonnrummet samt nollrummet till $A$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sätter $x_3 = s$ (fri variabel) och hittar $x_2 = -\frac{1}{3}s$, $x_2 = -\frac{1}{3}s$, dvs. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s$, $s \in \mathbb{R}$

eller $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ · $\operatorname{rang}(A) = 2$ (trappstegsekv. har två pivåelement),

· kolonnrummet: $\left\{\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$ (då $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, men här funkar vilka två kolonner av $A$ som helst, då inga två är parallella)

· nollrummet: $\left\{t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$.

4) För vilka $s \in \mathbb{R}$ är

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2s \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$ linjärt beroende?

Skriv nollvektorn som icke-trivial linjärkombination av $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ för ett sådant fall.

För vilka värden på $s$ utgör de en bas för $\mathbb{R}^3$?

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2s & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ s & 2 & s \end{pmatrix} = 2s + 2s^2 - 2s - 4 = 2(s^2 - 2) = 0 \iff s = \pm\sqrt{2}$$

väljer $s = \sqrt{2}$ : $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & 0 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow x_3 = t,\ x_2 = -t,\ x_1 = (\sqrt{2}-1)\, t$

väljer $t = 1$: $(\sqrt{2}-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \theta$.

För $s \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ är determinanten $\neq 0$ $\overset{\text{Sats 8.1}}{\Longrightarrow}$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ linj. oberoende $\overset{\text{Sats 7.5}}{\Longrightarrow}$ en bas.

5) Beräkna $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ för hand.

Subtraherar första och tredje rad från sista och utvecklar efter den:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -\left[ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right] = (-2)\cdot 4 - 1 \cdot 3 + (-2)\big(2 \cdot 1 - (-2)\cdot 3\big)$$

$$= -11 - 2 \cdot 8 = -27.$$

t.ex. utv. efter andra kolonn

6) Anpassa ett andragradspolynom med hjälp av minsta-kvadrat-metoden till datan

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3 | 1 | 2 | 5 |

dvs. hitta koefficienter $c_2, c_1, c_0$ så att polynomet $p(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ minimerar felet

$F = (y_1 - p(x_1))^2 + (y_2 - p(x_2))^2 + (y_3 - p(x_3))^2 + (y_4 - p(x_4))^2$ bland alla andragradspolynom.

$y_i = c_2 x_i^2 + c_1 x_i + c_0$ för $i \in \{1,2,3,4\}$ ger ekv. systemet
$$\begin{cases} 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 + c_0 = 3 \\ 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_1 + c_0 = 1 \\ 4 \cdot c_2 + 2 \cdot c_1 + c_0 = 2 \\ 9 \cdot c_2 + 3 \cdot c_1 + c_0 = 5 \end{cases}$$

dvs. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ och $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$(A^T A)^{-1}$: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 98 & 36 & 14 & 1 & 0 & 0 \\ 36 & 14 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & -5/2 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -6 & -14 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -7/10 & 9/5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -21/5 & 19/5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 49/20 & -21/20 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -21/20 & 19/20 \end{array}\right]$

Alltså är $(A^T A)^{-1} A^T \vec{y} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ -15 & 49 & -21 \\ 5 & -21 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 54 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -61/20 \\ 59/20 \end{pmatrix}$ dvs. $p(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{61}{20}x + \frac{59}{20}$ den minsta-kvadrat-approximationen.

7) Bestäm skärningslinjen av följande plan:

$\Pi_1 : x - 3y + 2z = 1 \qquad \Pi_2 : -2x + y + z = -2$

Leder till följande ekv. system: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{cases} z = s \\ y = s \\ x = 1 + s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$

Lösningen är alltså $\ell : (x,y,z) = (1,0,0) + s(1,1,1)$, $s \in \mathbb{R}$

Alternativt kan man med ögonblick se att $(1,0,0)$ löser båda ekvationer och ta som riktningsvektor $\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.