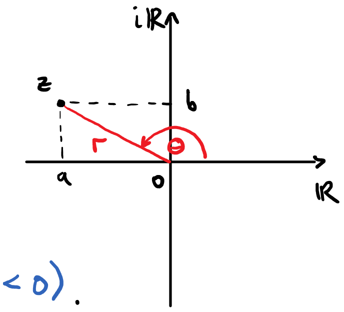
1 Komplexa tal, $\mathbb{C}$



$z \in \mathbb{C}$ kan skrivas i **rektangulär** form $z = a + b \cdot i$,
där $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ eller
i **polär** form $z = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,
där $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ (om $a < 0$).
(inte entydigt

$r \cdot e^{i(\theta + k \cdot 2\pi)} = r \cdot e^{i\theta}$

$\bar{z} = a - bi = r \cdot e^{-i\theta}$ är konjugatet till z.

- Räkneregler:

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ $|zw| = |z| \cdot |w|$

$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ $|z+w| \le |z| + |w|$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

$\frac{u}{w} = \frac{u \cdot \bar{w}}{|w|^2}$ $|z| = |\bar{z}|$

- Definerade $e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$ för godtycklig $z \in \mathbb{C}$
vanliga regler gäller: $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

- de Moivre: $(e^{i\theta})^m = e^{i\theta m}$ för $\theta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$
Eulers formel: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

- Lösningar till komplexa polynomekvationer:
  - andra grad: $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ $\rightarrow$ kvadratkomplettering leder till
  $z^2 = u$ $\rightarrow$ ansats: $z = a + bi$ (+ absolutbeloppsvillkor!)
  - binomiska ekvationer: $z^n = u$ $\rightarrow$ ansats: $z = r \cdot e^{i\theta}$ (polär)
  (OBS: $\arg(z)$ är inte entydigt $\Rightarrow$) ger n lösningar

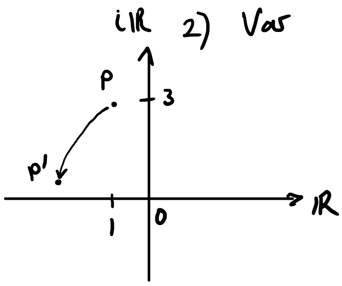
- **Sats 1.5** ett reellt polynom $p(x)$ kan skrivas som en produkt av reella första- och andragradspolynom, då

  Sats 1.4 om $p(z)$ har reella koefficienter gäller $p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow p(\bar{\alpha}) = 0$.
  (även samma multiplicitet)

Exempel: 1) Skriv $z = \dfrac{(2+2i)^{20}}{(\overline{4i})^{10}}$ i rektangulär och polär form.

$$(2+2i) = 2\sqrt{2}\,\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}_{= e^{i\theta} \text{ för } \theta = \frac{\pi}{4}} \Rightarrow (2+2i)^{20} = 8^{10}\cdot e^{i5\pi};\quad (\overline{4i})^{10} = (-4i)^{10} = 4^{10}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i\cdot 10} = 4^{10}\cdot e^{-5\pi i}$$

$$\Rightarrow z = \frac{8^{10}}{4^{10}}\cdot e^{i5\pi}\cdot e^{i5\pi} = 2^{10}\cdot \underbrace{e^{10\pi i}}_{=1} = 2^{10}.$$



2) Var landar punkten $P=(-1,3)$ när $\mathbb{R}^2$ roteras med $\frac{\pi}{3}$ moturs?

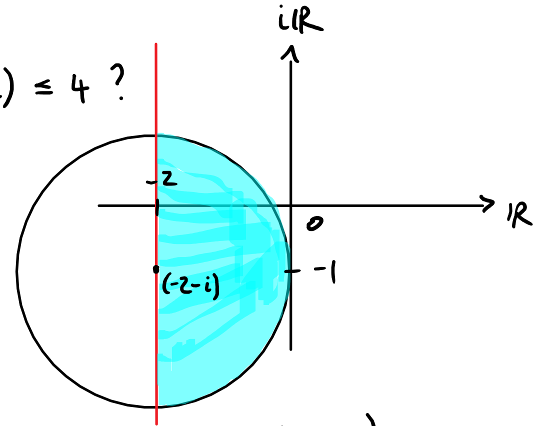
$(-1,3) \mathrel{\hat{=}} -1+3i$ om man interpreterar $\mathbb{R}^2$ som det komplexa talplanet.

Att gånga med $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ roterar det komplexa talplanet med $\frac{\pi}{3}$ moturs.

$$(-1+3i)\cdot e^{i\pi/3} = (-1+3i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1+3\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2}i.$$

Punkten $P=(-1,3)$ roteras alltså på punkten $P' = \left(-\frac{1+3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-3.1, 0.6)$.

3) Vilka $z \in \mathbb{C}$ uppfyller $\begin{cases} (z+2+i)(\bar{z}+2-i) \le 4 \\ z+\bar{z} \ge -4 \end{cases}$?



- $(z+2+i)\overline{(z+2+i)} = |z+2+i|^2 = |z-(-2-i)|^2 \le 4 \iff |z-(-2-i)| \le 2$
- $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \ge -4 \iff \mathrm{Re}(z) \ge -2$

Svar: Alla z i det blåa området (innanför cirkeln till höger om linjen).

4) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$ har nollställe $x = 1-i$.

Skriv det som produkt av reella första- och andragradsfaktorer så att andragradsfaktorerna inte har reella nollställen.

$$p(1-i) = 0 \xRightarrow{p \text{ har reella koeff.}} p(1+i) = 0$$

$$(x-(1-i))\cdot(x-(1+i)) = x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$$

$$\frac{p(x)}{x^2-2x+2} = x^2-4 = (x-2)(x+2) \quad \text{dvs. } p(x) = (x-2)(x+2)(x^2-2x+2).$$

2 Differentialekvationer

- $a(x)\,y' + b(x)\,y = d(x)$ linjär av första ordning
  kan skrivas om: $y' + g(x)\,y = h(x)$ → multiplicera med integrerande faktor $e^{G(x)}$ där $G' = g$, så att vänsterledet är lika med $(e^{G(x)} \cdot y)'$
- additiva konstanter kan bestämmas i begynnelsevärdesproblem
  Vill man dela med t.ex. y måste $y = 0$ uteslutas (och granskas i efterhand)
- $g(y) \cdot y' = h(x)$ separabel av första ordning → dela upp $y' = \frac{dy}{dx}$ och integrera båda sidor
- $y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = h(x)$ linjär av andra ordning

Sats 2.1 För linjära diff. ekvationer ges lösningarna y som $y = y_h + y_p$ där y_p är en specifik (partikulär) lösning till ekvationen och y_h alla lösningar till motsvarande homogena problem (där $h(x)$ ersätts med 0).

- om man förutsätter konstanta koefficienter, dvs. $a(x) = a$, $b(x) = b$, och $h(x) = 0$ leder det till karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$
  med lösningar $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$.

Sats 2.2 $$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & \\ (C_1 x + C_2)\, e^{r_1 x} & \end{cases} \text{ är den allmäna lösningen om } \begin{matrix} r_1 \neq r_2 \\ r_1 = r_2 \end{matrix},$$
där $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Sats 2.3 Om $r_{1/2} = \alpha \pm \beta i$, där $\beta \neq 0$ kan denna skrivas om till
$$y(x) = e^{\alpha x}\,(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)), \text{ där } A, B \in \mathbb{R}.$$

- Harmonisk svängning (med dämpning)
  $$y'' + \frac{c}{m}\,y' + \frac{k}{m}\,y = 0 \quad (\text{där } m = \text{massa},\ k = \text{fjäderkonstant},\ c = \text{dämpningskonst.})$$
  har kvalitativt sett tre fall:
  1) överkritisk dämpning $c^2 - 4mk > 0$ → $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ $\quad y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
  2) kritisk dämpning $c^2 - 4mk = 0$ → $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ $\quad y(t) = (C_1 t + C_2)\, e^{r_1 t}$
  3) dämpad svängning $c^2 - 4mk < 0$ ⇝ $r_1 = \alpha + i\beta = \overline{r_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\quad y(t) = e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$
- partikulärlösningar (ofta "try and error")
  1. $h(x)$ är ett polynom → polynomansats $y_p(x) = x^k \cdot p(x)$
     där p har samma grad som h, k: minsta ordn. derivat som dyker upp.
  2. $h(x) = p(x)\, e^{\alpha x}$, där $p(x)$ är ett polynom → ansats: $y(x) = e^{\alpha x} z(x)$ leder till 1
  3. hjälpekvation (t.ex. när $h(x) = \sin(ax)/\cos(ax)$, $a \in \mathbb{R}$, lös med $h(x) = e^{iax}$ i stället)
     "educated guessing"
  4. Variation av konstanten: Låt $C \to C(x)$ i y_h och lös diff.ekv. för C.

__Exempel__: 1) Lös $y' - \frac{y}{1-x} = \frac{x}{1-x}\cdot e^x$, $x > 1$.

Integrerande faktor $e^{G(x)}$, där $g(x) = \frac{1}{x-1}$ och $G(x) = \ln(x-1)$ (obs: $x>1$),
leder till $\left((x-1)y\right)' = -x\cdot e^x$

Partiell integration ger $\int -xe^x\,dx = -x\cdot e^x + e^x + C_1$, alltså

$$y = \frac{1}{x-1}\left((1-x)e^x + C_1\right) = -e^x + \frac{C_1}{x-1}.$$

__Alternativt:__ homogen diff.ekv. $y' - \frac{y}{1-x} = 0 \overset{\text{om } y\neq 0}{\iff} \frac{y'}{y} = \frac{1}{1-x}$ (separabel) $\iff \ln|y| = -\ln(1-x) + C_1$

alltså $y_h = C_1\cdot\frac{1}{1-x}$, $C_1 \neq 0$ och därför att $y\equiv 0$ fungerar: $y_h = \frac{C_1}{x-1}$, $C_1\in\mathbb{R}$.

Variation av konstanten: $y_p = \frac{C(x)}{x-1}$ leder till

$$y_p' + \frac{y_p}{x-1} = \frac{C'(x)}{x-1} - \cancel{\frac{C(x)}{(x-1)^2}} + \cancel{\frac{C(x)}{(x-1)^2}} \overset{!}{=} \frac{x}{1-x}e^x \iff C'(x) = -xe^x \iff C(x) = (1-x)e^x \ (+C_1)$$

$y_p = \frac{1-x}{x-1}e^x = -e^x$, dvs. $y = y_h + y_p = -e^x + \frac{C_1}{x-1}$ som ovan.

2) Lös $y'' + 6y = \cos(2x)$.

$r^2 + 6$ har nollställen $\pm\sqrt{6}\,i \overset{\text{Sats 2.3}}{\Longrightarrow} y_h = \cancel{e^{0x}}\left(A\cos(\sqrt{6}x) + B\sin(\sqrt{6}x)\right)$

Gissning av partikulärlösning $y_p = C_1\cdot\cos(2x) \Rightarrow y_p' = -2C_1\sin(2x)$, $y_p'' = -4C_1\cos(2x)$

$\Rightarrow y_p'' + 6y_p = -3C_1\cos(2x) \rightsquigarrow C_1 = -\frac{1}{3}$ (alt.: hjälpekvation med $h(x) = e^{i2x}$)

$\overset{\text{Sats 2.1}}{\Longrightarrow} y = y_p + y_h = -\frac{1}{3}\cos(2x) + A\cos(\sqrt{6}x) + B\sin(\sqrt{6}x)$.

3) Hitta allmäna reella lösningen till $y'' + 2y' + 4y = x\cdot e^x$.

$r^2 + 2r + 4 = (r+1)^2 + 3 = 0 \iff r_{1/2} = -1 \pm \sqrt{3}\,i$

$\overset{\text{Sats 2.3}}{\Longrightarrow} y_h = e^{-x}\left(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)\right)$

$y_p = e^x\cdot z(x)$ leder till $y_p' = e^xz' + e^xz$, $y_p'' = e^xz + 2e^xz' + e^xz''$ och

$(z'' + 2z' + z) + 2(z + z') + 4z = z'' + 4z' + 7z = x$, ansats $z = ax + b$

ger $4a + 7ax + 7b = x \iff a = \frac{1}{7}$, $b = -\frac{4}{49}$, dvs. $y_p = \left(\frac{x}{7} - \frac{4}{49}\right)e^x$ och

$y = y_p + y_h = e^{-x}\left(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)\right) + \left(\frac{x}{7} - \frac{4}{49}\right)e^x$, $A, B\in\mathbb{R}$.

4) Om man försummar luftmotståndet accelererar en kropp med tyngdkrafts acc. $g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$.

Ett barn kastar en sten från utsiktsplattformen av Burj Khalifa (452 m över gatan) neråt. Om den anländer på marken efter 9 s, med vilken fart slår den i marken? (försumma luftmotstånd!)

Utan luftmotstånd med tyngdkraft $F = m\cdot g$ som påverkar en acceleration enligt $F = m\cdot a$ (Newton) får vi $a = g = 10 = -y''$ (neråt) $\Rightarrow y(t) = -5t^2 + bt + c$, där y är höjd i meter och t tid i sekunder.

Med $y(0) = c = 452$ och $y(9) = -5\cdot 81 + 9\cdot b + 452 = 0$ följer $b = -\frac{47}{9}$ och

$y'(9) = -10\cdot 9 - \frac{47}{9} = -95\frac{2}{9}$. Stenen slår alltså med $\approx 95{,}2\ \frac{m}{s} \approx 343$ km/h i marken (lite orealistiskt då utan luftmotstånd).