

1 Det komplexa talsystemet

$$\begin{array}{ccccccc} \text{naturliga tal} & \text{heltal} & & \text{rationella tal} & \text{reella tal} & & \text{komplexa tal} \\ \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} & \subseteq \mathbb{Q} & \subseteq \mathbb{R} & \subseteq \mathbb{C} \\ \{1, 2, 3, \dots\} & \{-1, 2, -1, 0, 1, 2, \dots\} & & & & & \end{array}$$

$$\left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Motivering: Lösningar till $x^2 + 1 = 0$

Hitta på ett imaginärt tal i som uppfyller $i^2 = -1$.

1.1 Komplexa tal i rektangelär form

Def. 1.1 Det komplexa talsystemet $\mathbb{C}$ består av alla tal på formen $a + b \cdot i$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

Räkneoperationer: $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + bi \cdot di = ac + (ad)i + (bc)i + bd \cdot \overset{-1}{i^2} = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

För $z = a + bi \in \mathbb{C}$ kallas a dess real del (beteckning: $a =: \operatorname{Re}(z)$)
och b dess imaginär del (beteckning: $b =: \operatorname{Im}(z)$)

OBS: Både real- och imaginär del är reella tal!

Exempel:

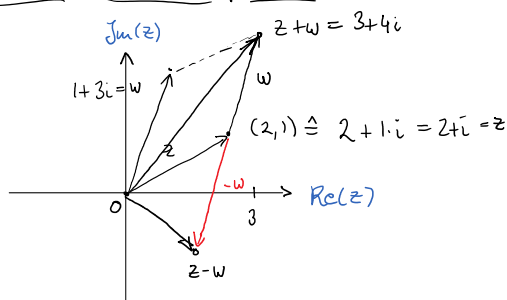
$$z = 2 + 3i, w = -1 + 5i$$

$$z + w = 2 + 3i + (-1) + 5i = (2 - 1) + (3 + 5)i = 1 + 8i$$

$$z - w = 2 + 3i - (-1) - 5i = (2 + 1) + (3 - 5)i = 3 - 2i$$

$$z \cdot w = (2 + 3i)(-1 + 5i) = 2(-1) + 2(5i) + 3i(-1) + 3i \cdot 5i = -2 + 10i - 3i + 15 \cdot \overset{-1}{i^2} = (-2 - 15) + (10 - 3)i = -17 + 7i$$

Det komplexa talplanet: ($\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$)



OBS: ibland skriver man $\mathbb{R}$ på x-axeln och $i\mathbb{R}$ på y-axeln

reella tal: x-axeln: $\{a + 0i; a \in \mathbb{R}\}$

rent imaginära tal: y-axeln: $\{0 + b \cdot i; b \in \mathbb{R}\}$

Def 1.2 För det komplexa talet $z = a + bi$ kallas $\bar{z} := a - bi$ dess konjugat.

Räkne regler: $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
 $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Bens: Låt $w = c + di$.

$$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = a + c - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = ac - bd - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

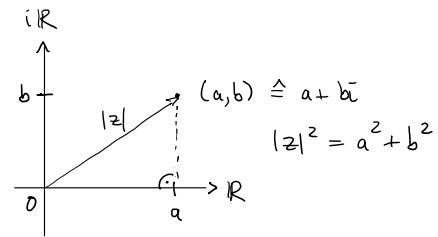
Ex.: Lös $z + 2\bar{z} = 3 + 2i$

Ansätt: $z = a + bi$

$$\begin{aligned} a + bi + 2(a - bi) &= 3 + 2i \\ 3a - bi &= 3 + 2i \end{aligned} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2 \end{aligned} \quad (\text{jämför real- och imaginär del})$$

$\Rightarrow z = 1 - 2i$ uppfyller ekvationen.

Def. 1.3 För $z = a + bi \in \mathbb{C}$
kallas $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ som dess absolutbelopp.



Ex: $|3i - 7| = |(-7) + (3i)| = \sqrt{(-7)^2 + 3^2} = \sqrt{58}$

Obs: om $z = a \in \mathbb{R}$ ($b=0$) $\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2} = |a|$

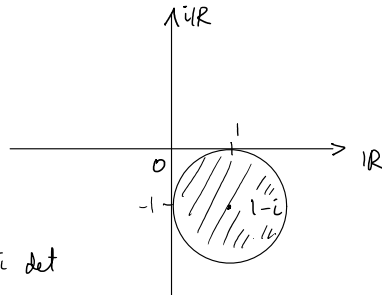
(absolutbeloppet på $\mathbb{C}$ är alltså en generalisering av absolutbeloppet på $\mathbb{R}$)

Ex: Vilka $z \in \mathbb{C}$ uppfyller

$$|z - 1 + i| \leq 1$$

$$z - (1 - i)$$

alla z som har "avstånd" mindre eller lika 1 till $1 - i$ i det komplexa talplanet.

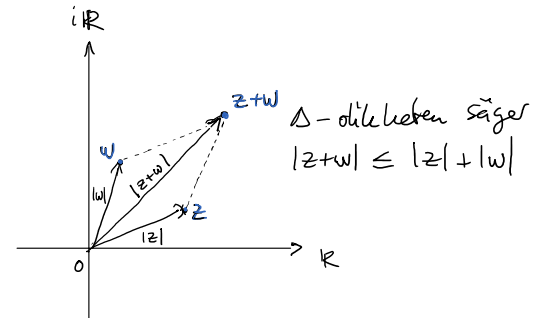


För absolutbeloppet gäller följande: $z, w \in \mathbb{C}$

(a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(c) $|z + w| \leq |z| + |w|$



Beweis: (a) $z = a + bi$,

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - bi^2 + \underbrace{(-bi + bi)}_{=0} \cdot a = a^2 + b^2$$

(b) Använder (a): $|zw|^2 \stackrel{(a)}{=} zw \cdot \overline{zw} = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} \stackrel{(a)}{=} |z|^2 \cdot |w|^2$. Dra roten ur detta.

(c) $\operatorname{Re}(z) = a \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, $w = c + di$

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = \underbrace{z\bar{z}}_{|z|^2} + \underbrace{w\bar{w}}_{|w|^2} + \underbrace{z\bar{w} + \bar{z}w}_{2\operatorname{Re}(w\bar{z})} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(w\bar{z}) + |w|^2$$

Obs: $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = a = \operatorname{Re}(z)$$

$$\stackrel{(b)}{\leq} |z|^2 + 2|w| \cdot |\bar{z}| + |w|^2$$

$$\stackrel{|\bar{z}| = |z|}{=} |z|^2 + 2|w| \cdot |z| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$