

Vill kunna definiera en kvot $\frac{u}{w}$, där $u, w \in \mathbb{C}$, alltså ett tal $z \in \mathbb{C}$ så att $w \cdot z = u$.

Ex. $(-1+2i) \cdot z = 3-i$; $z = \frac{3-i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{-3-2+i-6i}{1+4} = \frac{-5-5i}{5} = -1-i$

Def. 1.4 För $u, w \in \mathbb{C}$, där $w \neq 0$ definieras kvoten $\frac{u}{w}$ enligt

$$\frac{u}{w} = \frac{u\bar{w}}{|w|^2}. \quad \frac{u}{w} \text{ är talet vilket } w \text{ måste gångeras med för att få } u \text{ som produkt.}$$

Räkneregler: (a) $\frac{u_1}{w_1} \cdot \frac{u_2}{w_2} = \frac{u_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_2}$

Bevis: (a) $z_1 = \frac{u_1}{w_1}, z_2 = \frac{u_2}{w_2}$ enligt def gäller $u_1 = z_1 w_1, u_2 = z_2 w_2$

$$u_1 \cdot u_2 = z_1 w_1 \cdot z_2 w_2 = (z_1 z_2)(w_1 w_2) \Rightarrow z_1 z_2 \text{ har}$$

egenskapen som $\frac{u_1 u_2}{w_1 w_2}$ ska ha. $\Rightarrow \frac{u_1}{w_1} \cdot \frac{u_2}{w_2} = z_1 z_2 = \frac{u_1 u_2}{w_1 w_2}$

(b) $\frac{u_1}{w_1} + \frac{u_2}{w_2} = \frac{u_1 w_2 + u_2 w_1}{w_1 w_2}$

(b) $w_2 u_1 = w_2 z_1 w_1; w_1 u_2 = w_1 z_2 w_2$

$$w_2 u_1 + w_1 u_2 = w_2 z_1 w_1 + w_1 z_2 w_2 = (w_1 w_2)(z_1 + z_2)$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = \frac{w_2 u_1 + w_1 u_2}{w_1 w_2} \quad \square.$$

OBS: Förlängning och förkortning av bråk som vanligt enligt (a)!

Ex: $z = \frac{3-i}{-1+2i}, w = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-1+2i}{2} = i$

$$\frac{3-i}{-1+2i} \cdot \frac{1+i}{1-i} = \frac{(3-i)(1+i)}{(-1+2i)(1-i)} = \frac{4+2i}{1+3i} = (-1-i) \cdot i = 1-i$$

Vidare gäller: (c) $\overline{\left(\frac{u}{w}\right)} = \frac{\bar{u}}{\bar{w}}$

Bevis: (c) $\frac{u}{w} =: z$ uppfyller $w \cdot z = u \Rightarrow \bar{u} = \overline{w \cdot z} = \bar{w} \cdot \bar{z} \stackrel{\text{Def. 1.4}}{\Rightarrow} \bar{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{w}}$

(d) $\left|\frac{u}{w}\right| = \frac{|u|}{|w|}$

(d) $|u| = |w \cdot z| = |w| \cdot |z| \stackrel{|w| > 0}{\Rightarrow} |z| = \frac{|u|}{|w|} \quad \square.$

Ex: Beräkna absolutbeloppet av $z = \frac{(2-i)(\sqrt{5}+2i)}{1-4i}$.

Enligt (d) gäller $|z| = \frac{|(2-i)(\sqrt{5}+2i)|}{|1-4i|} = \frac{|2-i| \cdot |\sqrt{5}+2i|}{|1-4i|} = \frac{\sqrt{5} \cdot 3}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{15}{17}}$

1.2 Komplexa tal i polär form

precis som i $\mathbb{R}^2$ finns det ytterligare ett sätt
(standard: rektangulära koordinater $(a,b) \hat{=} a+bi$,
där $a,b \in \mathbb{R}$) att skriva komplexa tal på:
med polära koordinater

Def. 1.5 Låt $z = a+bi \in \mathbb{C}$

då kan vi skriva $z = r \cdot \cos \theta + i r \cdot \sin \theta$
med $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ och $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$,
i så kallad polär form.

θ kallas argument och skrivs $\theta = \arg(z)$

OBS! θ är inte entydig! Dvs. två komplexa tal i
polär form dvs. $r_1 \cdot \cos \theta_1 + i r_1 \sin \theta_1$ och $r_2 \cos \theta_2 + i r_2 \sin \theta_2$
är samma $\Leftrightarrow r_1 = r_2$ och $\theta_1 = \theta_2 + k \cdot 2\pi$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

Vi inför symboliskt $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$
och kan skriva $z = r \cdot e^{i\theta}$.

Ex: $z = -1 + \sqrt{3}i$ i polär form.

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{z}{r} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \triangleq (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ ligger på enhetscirkeln}$$

$$\theta \text{ så att } \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ och } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ t.ex. } \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

För $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ och $e^{i\theta}$ som definierad ovan gäller:

$$(a) |e^{i\theta}| = 1$$

$$(b) \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$$

$$(c) e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

Bevis: (a) $|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$

(b) $\frac{1}{e^{i\theta}} \cdot \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{|e^{i\theta}|^2} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \underbrace{\cos(-\theta)}_{=\cos \theta} + i \underbrace{\sin(-\theta)}_{=-\sin \theta} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$

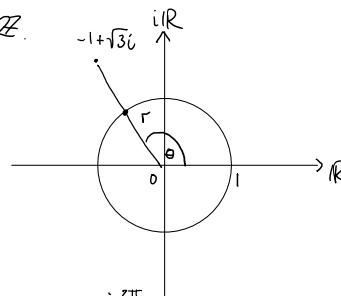
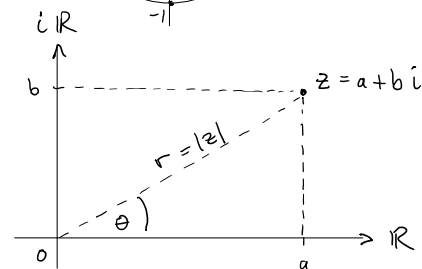
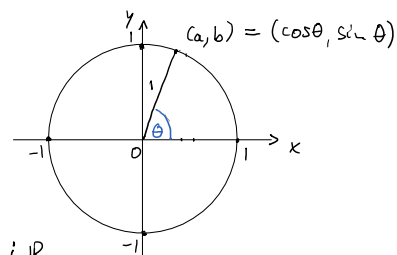
(c) $e^{i\theta} e^{i\varphi} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \underbrace{(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi)}_{=\cos(\theta+\varphi)} + i \underbrace{(\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta)}_{=\sin(\theta+\varphi)} = e^{i(\theta+\varphi)}$

Vi kan faktiskt definiera e^z för ett godtyckligt komplext tal $z = a+bi$ genom

$$e^z := e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

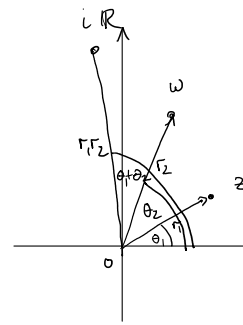
$\Rightarrow$ vanliga potenslagar gäller!

OBS: $\overline{z} = r \cdot e^{-i\theta}$ dvs. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ och $|z| = |\overline{z}|$.



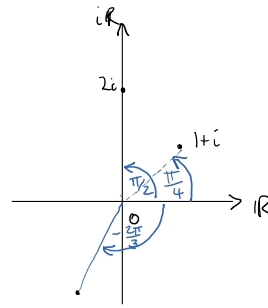
Föreläsning av multiplikation/division med $z \in \mathbb{C}$

Låt $z = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ och $w = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$
 $z \cdot w = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
 $\Rightarrow$ produkten har som absolutbelopp produkten av absolutbeloppen.
 $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
 $\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$



"Multiplikation/Division med $z \in \mathbb{C}$ vrids $\mathbb{C}$ med vinkeln $\arg(z)$ moturs/medurs och reskalerar (Faktor $|z|$ eller $\frac{1}{|z|}$)"

Ex: • Bestäm ett argument till $\frac{2i(1+i)}{-1-\sqrt{3}i}$
 $\arg\left(\frac{2i(1+i)}{-1-\sqrt{3}i}\right) = \arg(2i) + \arg(1+i) - \arg(-1-\sqrt{3}i)$
 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - (-\frac{2\pi}{3}) = \frac{17}{12}\pi$

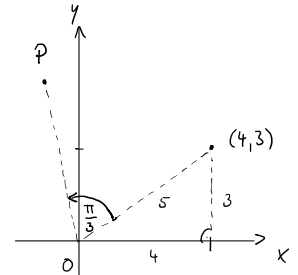


• Vart hamnar punkten (4,3) efter en rotation med 60° moturs runt origo?

Recept: översätt till $\mathbb{C}$ dvs. $z = 4 + 3i$

$60^\circ \triangleq \frac{\pi}{3}$ dvs. rotation moturs motsvarar gånga med $e^{i\frac{\pi}{3}} \in \mathbb{C}$. Dvs. $(4+3i) \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(4-3\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(3+4\sqrt{3})i$

ger $P = (2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} + 2\sqrt{3})$.



Sats 1.1 (de Moivre's formel)

För alla $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{eller ekvivalent: } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$z^{-n} := \frac{1}{z^n}$ leder till $(e^{i\theta})^{-n} = \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = \frac{1}{e^{in\theta}} = e^{-in\theta}$ och } Sats 1.1 gäller t.o.m. för alla heltal, dvs. $n \in \mathbb{Z}$
 $z^0 := 1$ (för $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) alltså $(e^{i\theta})^0 = 1 = \cos(0) + i \sin(0)$

Ex: • Beräkna $(-1 + \sqrt{3}i)^{20} = (2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}})^{20} = 2^{20} \cdot e^{i\frac{40\pi}{3}} = 2^{20} \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi}$, dessutom $e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos(\frac{4}{3}\pi) + i \sin(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 $\Rightarrow \arg(z) = \frac{40}{3}\pi = 12\pi + \frac{4}{3}\pi$. Så vet vi att $z = 2^{20} \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi}$, så vet vi att $z = 2^{20} \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -2^{19} \cdot (1 + \sqrt{3}i)$

• Formler för $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$ gratis:

$\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) = e^{i2\theta} \stackrel{\text{Sats 1.1}}{=} (e^{i\theta})^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + i 2 \cos \theta \sin \theta + \cancel{i^2 \sin^2 \theta} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i 2 \sin \theta \cos \theta$
 jämför Re och Im
 $\Rightarrow \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ och $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$

Redan tidigare har vi observerat att

$z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$ och $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

Detta och $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = \cos \theta - i \sin(-\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$ leder till

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Eulers formler

Ex: $\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$\stackrel{\text{Sats 1.1}}{=} \frac{1}{4} (e^{i2\theta} + 2 \underbrace{e^{i\theta} e^{-i\theta}}_{=1} + e^{-i2\theta}) = \frac{1}{4} (e^{i2\theta} + 2 + e^{-i2\theta}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta)$