

1.3 Komplexa polynom ekvationer

I allmän form: Hitta lösningar $z \in \mathbb{C}$ till

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

$$\left[n = \max \{j \in \mathbb{N}_0; a_j \neq 0\} \right] \text{ heter polynomets grad}$$

Ex: $z^2 = 3 - 4i$

sätter $z = a + bi \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 3$ och $2ab = -4$

KNEP Titta också på absolutbeloppet $|z|^2 = |z^2| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$
 $= \sqrt{a^2 + b^2}$

$\Rightarrow 2a^2 = a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2$

$2b^2 = a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) = 2 \Rightarrow b = \pm 1$

$2ab = -4 \Rightarrow a = 2, b = -1$ och $a = -2, b = 1$ dvs. $z = 2 - i$ och $z = -2 + i$ är lösningarna.

Vi kan ta hand om alla (komplexa) andragsgrads polynom med hjälp av:

Kvadratkomplettering:

En godtycklig andragsgrads ekv. kan skrivas om till formen $z^2 = u$,
 för något $u \in \mathbb{C}$ med hjälp av kvadratkomplettering.

Ex: $z^2 - 6z + 2iz + 5 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow z^2 + 2(-3+i)z + 5 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow (z + (-3+i))^2 - (-3+i)^2 + 5 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow (z + (-3+i))^2 - (9 - 6i - 1) + 5 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow (z + (-3+i))^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow w^2 = 3 - 4i$
 $=: w$

Lösningar är (enligt ovan)

$w_1 = 2 - i, w_2 = -2 + i$

dvs. $z_1 = w_1 - (-3+i) = 5 - 2i$

$z_2 = w_2 - (-3+i) = 1$

□.

Anmärkning: pq-formel in i kallet!

$z^2 + 2z + 5 = 0$

$z = -1 \pm \sqrt{1-5}$ Nu vet vi att $(\pm 2i)^2 = -4$

$z_{1/2} = -1 \pm (\pm 2i) \Rightarrow z_1 = -1 + 2i, z_2 = -1 - 2i$

Binomiska ekvationer

$z^n = u$

där $n \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{C}$

Om vi skriver $z = r \cdot e^{i\theta} \Rightarrow z^n = r^n \cdot e^{in\theta}$

och kan u i polär form $u = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$

$\Rightarrow r = \sqrt[n]{r_1}$ och $\theta = \frac{1}{n}(\theta_1 + k \cdot 2\pi) = \frac{\theta_1}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$

OBS: Fundera bara om man kan u i polär form!

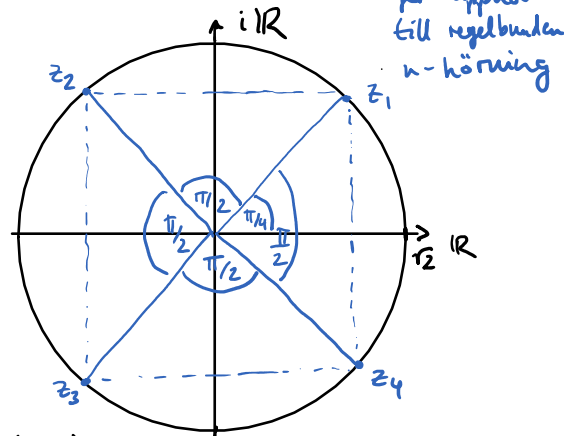
Ex: $z^4 = -4$ där $-4 = 4 \cdot e^{i\pi}$

$\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$|z| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ ledes till

$z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} = 1 + i \quad (k=0), z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i3\pi/4} = -1 + i \quad (k=1)$

$z_3 = \sqrt{2} \cdot e^{i5\pi/4} = -1 - i \quad (k=3), z_4 = \sqrt{2} \cdot e^{i7\pi/4} = 1 - i \quad (k=4), (z_5 = \sqrt{2} \cdot e^{i9\pi/4} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} = z_1)$



allmänt om polynomdivisioner

Sats 1.2 (Algebrens fundamentalsats)

Varje icke-konstant (dvs. av grad ≥ 1) polynom med komplexa koefficienter har minst ett (komplex) nollställe.

Beriset är äreshurs. OBS: "komplex" kan betyda "reellt"!

En omedelbar följd är

Sats 1.3 Ett polynom $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ av grad n har precis n nollställen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ (med multiplicitet) och kan faktoriseras:

$$p(z) = a_n (z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n), \text{ där } a_n \neq 0 \text{ är koefficienten framför } z^n.$$

Beris: enligt sats 1.2 har $p(z)$ ett nollställe $\alpha_1 \in \mathbb{C}$

Faktorsatsen säger att $p(z) = (z - \alpha_1) q(z)$ för något komplext polynom $q(z)$ av grad $n-1$.

$$\begin{aligned} \therefore p(z) &= (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n) \cdot q_n(z) \quad \text{där } q_n(z) \text{ har grad } 0, \text{ dvs är en konst.} \\ &\stackrel{!}{=} a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n). \end{aligned}$$

□.

Reella polynom: $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ där $a_j \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

Sats 1.4 Om $p(z)$ har reella koefficienter och $\alpha \in \mathbb{C}$ är ett nollställe till $p(z)$, så är även $\bar{\alpha}$ det (t.o.m. av samma multiplicitet).

Beris: $p(\alpha) = 0$ innebär $\overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$

vidare får vi:

$$0 = \overline{p(\alpha)} = \overline{a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{a_n} \overline{\alpha^n} + \dots + \overline{a_1} \overline{\alpha} + \overline{a_0} \stackrel{a_j \in \mathbb{R}}{=} \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha}^n + \dots + \overline{a_1} \overline{\alpha} + \overline{a_0} = \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha}^n + \dots + \overline{a_1} \overline{\alpha} + \overline{a_0} = p(\bar{\alpha})$$

□.

Ex: $p(z) = z^4 - 4z^3 + z^2 + 16z - 20$ är reellt och har $2i$ som nollställe.

sats 1.4 $\Rightarrow 2+i = 2-i$ är ett till nollställe. Enligt factorsatsen är

$$p(z) = (z - (2+i))(z - (2-i)) \cdot q(z) \quad \text{för något polynom } q(z) \text{ av grad } 2$$

$\Rightarrow q(z)$ måste vara reellt (reell polynomdivision)

$$\text{här: } p(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 - 4) \Rightarrow z_1 = 2+i, z_2 = 2-i, z_3 = 2, z_4 = -2 \text{ är alla nollställen. enligt sats 1.3}$$

$$\text{OBS: } (z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha \cdot \bar{\alpha} = z^2 - \underbrace{2 \operatorname{Re}(\alpha)}_{\text{är reella tal}} z + \underbrace{|\alpha|^2}_{\text{är reella tal}} \quad (\text{ett reellt andragradspolynom})$$

dvs. icke-reella nollställen $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ "kommer i par" $(\alpha, \bar{\alpha})$ och ger upphov till en reell andragradsfaktor, när man gångar båda linjära faktorer $(z - \alpha)$ och $(z - \bar{\alpha})$.

Sats 1.5 Varje icke-konstant polynom med reella koefficienter kan skrivas som en produkt av reella första- och andragsgrads polynom.

Beris: Vi använder Sats 1.3 : $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

där $a_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n$ (reellt polynom) kan skrivas som

$$p(z) = a_n (z - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n) \text{ där } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ är nollställen.}$$

$$(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2$$

$\Rightarrow$ om det finns reella α_j kan vi dela bort dem (faktorsatsen)
alla icke-reella nollställen α dyker upp lika ofta som $\bar{\alpha}$; dessa linjära faktorer ges upphov till reella andragsgradsfaktorer, som vi också kan dela bort.
Stutar efter max n steg. $\square$

Ex: $p(x) = x^4 + 4$

har inga reella nollställen

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4 \Leftrightarrow z_{1/4} = 1 \pm i, z_{3/4} = -1 \pm i$$

Sats 1.3 $\Rightarrow$ $p(z) = (z - (1+i))(z - (1-i)) \cdot (z - (-1+i)) \cdot (z - (-1-i))$
 $= (z^2 - 2\operatorname{Re}(1+i)z + |1+i|^2)(z^2 - 2\operatorname{Re}(-1+i)z + |-1+i|^2)$
 $\Leftarrow (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2) = z^4 + 4$

OBS: ett reellt polynom av udda grad har (minst) ett reellt nollställe

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \quad ; \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ och } n \text{ udda}$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ så att } p(x_0) = 0.$$

Beris: • $p(x)$ kan faktoriseras enligt Sats 1.5 som

$$p(x) = a_n \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_m(x) \text{ där } q_1, \dots, q_m \text{ är reella första- eller andragsgrads polynom.}$$

$\Rightarrow$ minst en faktor $q_j(x)$ är ett första-gradspolynom, alltså av formen $(x - \alpha) \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ är ett nollställe. $\square$

• om n (största potensen) är udda

$$\Rightarrow \text{för } x \rightarrow +\infty : p(x) \rightarrow \operatorname{sgn}(a_n) = \begin{cases} +1 & \text{för } a_n > 0 \\ -1 & \text{för } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\text{för } x \rightarrow -\infty : p(x) \rightarrow -\operatorname{sgn}(a_n)$$

dessutom är alla polynom kontinuerliga $\Rightarrow \exists x_0$ där $p(x)$ korsar x -axeln.