

2 Differential ekvationer

2.1 Linjära / separabla av första ordning

Def. 2.1 En likhet som innehåller en obekant funktion $y(x)$ dess derivator samt kända funktioner i variabeln x kallas en differential ekvation.
Ordningen syftar på högsta förekommande ordning av derivat.

Ex: $y_0 = y'(x)$, $y_0 + e^{5x} y_0' = \ln(x)$, $\frac{1}{x^2+1} \cdot (y'(x))^2 = \frac{y(x)}{y''(x)}$ (andra ordning)

OBS: Ofta (om man inte riskerar förfälskning) undviker man att skriva x som argument i funktionen $y(x)$ och derivatorna, dvs. $y = y'$, $y + e^{5x} \cdot y' = \ln(x)$, $\frac{y'}{1+x^2} = \frac{y}{y''}$

Def. 2.2 En diff. ekv. kallas linjär, om inga produkter eller icke-linjära funktioner av y och dess derivator förekommer.

Ex: $y = y' \Leftrightarrow y - y' = 0$ } linjära $y \cdot y' = 5$ }
 $y + e^{5x} y' = \ln(x)$ } $\frac{y'}{1+x^2} - \frac{y}{y''} = 0$ } inte linjära

Den "enklaste" sådana diff. ekvation är $y'(x) = f(x)$
strategi: Integrera båda sidor, om du kan en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$.
med avseende på x

Ex: $y'(x) = x^2 + 2$; $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + C$ är (en) primitiv fkt. till $f(x) = x^2 + 2$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + C$ är den allmänna lösningen.

- En partikel rör sig fram och tillbaka på en rät linjig bana med hastighet $\cos(2t)$ vid tid t . Låt $s(t)$ beteckna dess position (vid tid t). Hitta $s(t)$.

$$s'(t) = \cos(2t) \Rightarrow s(t) = \int \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \sin(2t) + C$$

Vi verkar inte ha tillräcklig info för att lösa detta.

För att bestämma $s(t)$ behöver vi ett begynnelsevärde (eller randvillkor)

t.ex. $s(0) = 1 \Rightarrow s(0) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 0) + C = 1 \Rightarrow C = 1$

lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\boxed{s(t) = \cos(2t), s(0) = 1}$ är alltså $s(t) = 1 + \frac{\sin(2t)}{2}$.

En allmän linjär diff. ekv. av första ordning är

$$a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = h(x) \quad \text{för givna funktioner } a(x), b(x) \text{ och } h(x).$$

Ex: $\ln(x) y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ (alltså $a(x) = \ln(x)$, $b(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$)

Här man lite tar: $(\ln(x) \cdot y(x))' = \frac{1}{x} \cdot y(x) + \ln(x) y'(x)$
dvs. vänsterled är derivatan av $\ln(x) \cdot y(x)$

$$\Rightarrow \ln(x) \cdot y(x) = \int \ln(x) y'(x) + \frac{1}{x} y(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

$$y(x) = 1 + \frac{C}{\ln(x)}, \quad x \neq 1$$

dvs. $y(x) = 1 + \frac{C}{\ln(x)}$ är den allmänna lösningen både på $(0,1)$ och $(1,\infty)$.

Integrerande faktor

genom att dela med $a(x)$ kan man alltid skriva en linjär diff. ekv. av första ordning i formen $y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$

Hittar man en primitiv funktion $G(x)$ till $g(x)$ och gånger med den integrerande faktorn $e^{G(x)}$ fås

$$\begin{aligned} y' \cdot e^{G(x)} + g(x)y \cdot e^{G(x)} &= h(x)e^{G(x)} \quad (\text{ekvivalent då } e^{G(x)} > 0) \\ \Leftrightarrow \underbrace{y' \cdot e^{G(x)} + g(x)y \cdot e^{G(x)}}_{(y \cdot e^{G(x)})'} &= h(x)e^{G(x)} \\ \Leftrightarrow y \cdot e^{G(x)} &= \int h(x)e^{G(x)} dx \Leftrightarrow y = e^{-G(x)} \int h(x)e^{G(x)} dx \end{aligned}$$

Ex: $y' + 2x y = x$

Här $g(x) = 2x$, $G(x) = x^2 + C$, den integrerande faktorn är alltså $e^C e^{x^2}$

$$\Leftrightarrow e^{C+x^2} y' + e^{C+x^2} 2x \cdot y = x \cdot e^{C+x^2}$$

$$\Leftrightarrow (y \cdot e^{C+x^2})' = x \cdot e^{C+x^2} \Leftrightarrow y \cdot e^{C+x^2} = \frac{e^C}{2} e^{x^2} + C' \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{2} + \frac{C'}{2} \cdot \frac{e^{-x^2}}{e^C} = \frac{1}{2} + B \cdot e^{-x^2}, \quad C', C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$$

$x y' + x^{3/2} y = x^{3/2}, \quad x > 0$

$$\Leftrightarrow y' + \sqrt{x} y = \sqrt{x}$$

Här $g(x) = \sqrt{x}$, $G(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + C \Rightarrow$ int. faktor $e^{\frac{2}{3} x^{3/2}}$

$$\Leftrightarrow (e^{\frac{2}{3} x^{3/2}} y' + \sqrt{x} \cdot e^{\frac{2}{3} x^{3/2}} y) = \sqrt{x} e^{\frac{2}{3} x^{3/2}} \Leftrightarrow y \cdot e^{\frac{2}{3} x^{3/2}} = \int \sqrt{x} e^{\frac{2}{3} x^{3/2}} dx = e^{\frac{2}{3} x^{3/2}} + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = 1 + C \cdot e^{-\frac{2}{3} x^{3/2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = 1; \quad x > 0$

Här $g(x) = \frac{1}{x}$, $G(x) = \ln(x)$, $e^{G(x)} = x$

$$\Leftrightarrow y' \cdot x + y = x \cdot \sin x \Leftrightarrow (y \cdot x)' = x \cdot \sin x \Leftrightarrow y \cdot x = \int x \cdot \sin(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{P.I.: } \int (f \cdot g)' dx &= \int f' \cdot g + f \cdot g' dx \Leftrightarrow \int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx \\ \int x \sin x dx &= -x \cdot \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C \\ \Leftrightarrow y \cdot x &= -x \cdot \cos x + \sin x + C \Leftrightarrow y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

$$y(\pi) = 1 \text{ ger } y(\pi) = -\cos \pi + \frac{\sin \pi}{\pi} + \frac{C}{\pi} = 1 + 0 + \frac{C}{\pi} \Rightarrow C = 0$$

$$y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} \text{ är lösningen till begynnelsevärdesproblemet.}$$

Några tillämpningar av linjära diff. ekv. av första ordning

- 1) En bakteriekultur växer med en hastighet proportionell mot antalet i kulturen. Antalet är $4 \cdot 10^6$ och två timmar senare 10^8 . Ange en funktion $y(t)$ för antalet efter t timmar.

$$y'(t) = k \cdot y(t), \quad y(0) = 4 \cdot 10^6, \quad y(2) = 10^8$$

$$\Leftrightarrow y' - k y = 0 \quad \text{här } g(t) = -k, \quad G(t) = -kt, \quad e^{G(t)} = e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow (y \cdot e^{-kt})' = 0 \Leftrightarrow y \cdot e^{-kt} = C \Leftrightarrow y = C \cdot e^{kt}$$

$$y(0) = 4 \cdot 10^6 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 4 \cdot 10^6$$

$$y(2) = 4 \cdot 10^6 \cdot e^{k \cdot 2} = 10^8 \Leftrightarrow e^{2k} = \frac{1}{4} \cdot 10^2 = 25 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \ln(25)$$

$$\Rightarrow \text{Lösningen är } y(t) = 4 \cdot 10^6 \cdot e^{\frac{1}{2} \ln(25) \cdot t} = 4 \cdot 10^6 \cdot 5^t.$$

- 2) En varm soppa står i ett 20°C varmt rum och svalnar inom 10 minuter från 90°C till 60°C . Hur lång tid tar det till soppan är 35°C varm?

(Newtons avsvåningslag: svalning sker med hastighet proportionell till temperaturskillnaden)

Låt $T(t)$ vara soppanns temperatur efter t minuter.

$$T' = -k(T - 20) \Leftrightarrow T' + kT = 20k$$

här $g(t) = k \Rightarrow$ integrerande faktor e^{kt}

$$(T' \cdot e^{kt} + k e^{kt} T) = 20k e^{kt} \Leftrightarrow e^{kt} \cdot T = 20 \cdot e^{kt} + C$$

$$= (e^{kt} \cdot T)' \Leftrightarrow T = 20 + \frac{C}{e^{kt}}$$

Vivet $T(0) = 90, T(10) = 60 : T(0) = 20 + \frac{C}{e^0} \Rightarrow 90 = 20 + C$ alltså $C = 70$

$$60 = T(10) = 20 + \frac{70}{e^{10k}} \Rightarrow e^{10k} = \frac{70}{40} \Rightarrow 10k = \ln \frac{7}{4} \text{ eller } k = \frac{1}{10} \ln \frac{7}{4}; e^{-kt} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-\frac{t}{10}}$$

Svar: $T(t) = 20 + 70 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{t/10}; 35 = 20 + 70 \cdot e^{-\frac{t}{10} \ln \frac{7}{4}} \Rightarrow t_1 = \frac{10 \ln \frac{14}{3}}{\ln \frac{7}{4}} \approx 27,5 \text{ (min.)}$

- 3) En 100 l-tank är fylld med en saltlösning med koncentration 30 g/l

Varje minut tappas 5 l av den nuvarande blandningen och fylls tanken på med 5 l saltlösning som har en koncentration på 20 g/l (kontinuerligt, omrörning)

Hur lång tid tar det till lösningen har 25 g/l?

$y(t)$ betecknar vikt av salt i tanken efter t minuter, $\frac{y(t)}{100}$ koncentrationen.

$$y'(t) = m_{in}(t) - m_{ut}(t) = 20 \frac{\text{g}}{\text{l}} \cdot 5 \text{ l} - \frac{y(t)}{100} \cdot 5 \text{ l}$$

dvs. $y'(t) = 100 - \frac{y(t)}{20} \Leftrightarrow y' + \frac{y}{20} = 100$

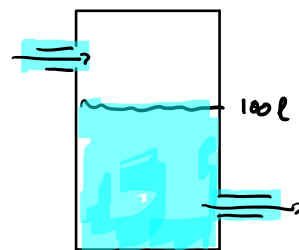
[Integrerande faktor: $e^{t/20}$] $\Leftrightarrow y' \cdot e^{t/20} + \frac{1}{20} e^{t/20} \cdot y = 100 \cdot e^{t/20}$

$$\Leftrightarrow e^{t/20} \cdot y = 2000 \cdot e^{t/20} + C, \text{ dvs. } y = 2000 + C \cdot e^{-t/20}$$

För att bestämma C använder vi att $y(0) = 3000$ (g)

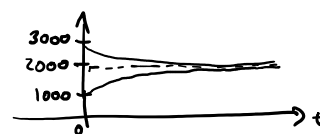
$$y(0) = 3000 = C \cdot e^{-0/20} + 2000 \Leftrightarrow C = 1000 \text{ dvs. } y(t) = 1000 \cdot e^{-t/20} + 2000$$

$$y(t_1) = 2500 = 1000 \cdot e^{-t_1/20} + 2000 \Leftrightarrow e^{-t_1/20} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_1 = -20 \cdot \ln \frac{1}{2} = 20 \ln 2.$$



Anmärkning: Man ser från lösningen att lin $y(t) = 2000$

OBS: med $y(0) < 2000$ skulle koncentrationen öka. $y = 2000$ är ett jämvikets läge.



Separabla ekvationer (av första ordning)

En annan kända enkel form av diff. ekv. är så kallade **separabla ekvationer**:

$$\boxed{g(y(x)) \cdot y'(x) = h(x)} \quad \text{för givna funktioner } g, h.$$

Ex: $e^{2y(x)} \cdot y'(x) = x$, $\frac{y+1}{y-1} \cdot y' = e^x - x$ eller $y'(x) = -k \sqrt{y(x)} \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = -k$

Strategien är då att separera y, y' ifrån variabeln x (som i ovanstående form) och använda kedjeregeln baklänges:

Om $G(x)$ är en primitiv funktion till $g(x)$ så gäller $\frac{d}{dx} G(y(x)) = g(y(x)) \cdot y'(x)$.

Ex. $e^{2y} \cdot y' = x$ (inte linjär!)

Då $\frac{1}{2}e^{2y}$ är en primitiv funktion till e^{2y} (med avseende y)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2y}\right)' = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \Leftrightarrow 2y = \ln(x^2 + 2C_1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln(x^2 + C_1')$$

"Kinesregel": Integrera båda led: Med hjälp av differentiationsnotationen kan vi också skriva $e^{2y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \Leftrightarrow \int e^{2y} dy = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2y} = \frac{x^2}{2} + C \dots$

OBS: Ibland kan man inte få ut y i explicit form av $y(t) = \dots$
Ibland behövs inte det.

Ex.: $y' = ky$ (bakteriekulturen, både linjär och separabel)

$\left(\frac{y \neq 0}{y' = ky} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int k dx \xrightarrow[y < 0]{y > 0} \ln|y| = k \cdot x + C_1 \Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^{kx} \Leftrightarrow y = \pm e^C \cdot e^{kx} \Leftrightarrow y = B \cdot e^{kx}\right.$

OBS: B är ett godtyckligt reellt tal $\neq 0$; $y \equiv 0$ måste kallas och läggas till.

- En cylindrisk tanke med vatten har ett hål i botten.

Vattenhöjden är 8 m i början, 4 m efter 2 min. När är tanken tom?

(Torricellis lag: vattenhöjden minskar med en hastighet proportionell med kvadratroten av höjden). Låt $y(t)$ beteckna vattenhöjden i m efter t minuter.

$$y' = -k\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{y}} = -k \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{y} = -kt + C_1,$$

$$2\sqrt{8} = \cancel{-k \cdot 0} + C_1; \quad 2\sqrt{4} = -2k + 2\sqrt{8} \quad \Leftrightarrow \quad k = -2 + 2\sqrt{2}$$

$y=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{y}=0$, vi kan alltså använda den implicita formen oaktat av:

$$2\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow 2(-2+2\sqrt{2}) \cdot t_1 + 4\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}} \approx 6.8 \text{ min}$$

OBS: Egentligen måste man leta efter t_1 så att $y(t) \rightarrow 0$ när $t \rightarrow t_1$ (då $y=0$ utesluts) fast det leder till samma.

Integral ekvationer

Analysens huvudsats: för en funktion f som är kontinuerlig på $[a, x]$ gäller

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Ex: Bestäm alla kontinuerliga $y(x)$ som uppfyller $y(x) = 5 + \int_0^x \frac{y(t)}{t^2+1} dt$

[strategi: derivera, begynnelsevillkor]

$$y' = \frac{y(x)}{x^2+1} \quad (y \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln |y| = \arctan(x) + C$$
$$\Leftrightarrow \quad y = \pm e^{\arctan(x)} \cdot e^C = 5 \cdot e^{\arctan(x)} \quad \text{och} \quad y(0) = 5 \cdot e^{\arctan(0)} = 5$$