

2.2 Diff. ekvationer av andra ordningen

I samband med Newtons kraftekvation ($F = m \cdot a$) får man ofta diff. ekvationer av andra ordning: Om $y(t)$ beskriver positionen, så är $y'(t) = v(t)$ hastigheten och $y''(t) = a(t)$ accelerationen.

En linjär diff. ekv. av andra ordningen har formen

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$$

för kända funktioner $a(x), b(x), h(x)$

Enkelast: $y'' = h(x)$

Ex.: $y'' = \sin(x) \Leftrightarrow y' = \int \sin x \, dx = -\cos x + C \Leftrightarrow y = -\sin(x) + Cx + D$
Genom tvåfaldig integration får vi in två konstanter!

- En bil accelererar längs en rak sträcka med $a(t) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Låt $s(t)$ vara dess position vid tiden t .

$$s''(t) = a(t) = 4 \Leftrightarrow s'(t) = 4t + C \Leftrightarrow s(t) = 2t^2 + Ct + D$$

t.ex. $s(0) = 30$ ger $D = 30$ och $s'(0) = 15$ ger $C = 15$ dvs. $s(t) = 2t^2 + 15t + 30$

Linjäritet

om y_1 löser $y'' + a(x)y' + b(x)y = h_1(x)$

och y_2 löser $y'' + a(x)y' + b(x)y = h_2(x)$

$\Rightarrow y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ löser $y'' + a(x)y' + b(x)y = \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x)$ för godtyckliga λ_1, λ_2

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' + a(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + b(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 (y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1) + \lambda_2 (y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2) = \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x)$$

Ex.: $y_1 = -\frac{x}{6} \cos 3x$ och $y_2 = x^2 - \frac{2}{9}$ löser
 $y'' + 9y = \sin 3x$ resp. $y'' + 9y = 9x^2$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = x^2 - \frac{2}{9} - \frac{x}{6} \cos 3x \text{ löser } y'' + 9y = \sin 3x + 9x^2$$

Sats 2.1 Om y_p är en lösning till den linjära diff. ekvationen

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x) \quad (*)$$

då ges samtliga lösningar till denna diff. ekvation av $y = y_h + y_p$,

där y_h betecknar alla möjliga lösningar till motsvarande homogena ekvation

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

y_p kallas partikulärlösning.

Bevis: Först kontrolleras vi att $y_p + y_h$ löser $(*)$

$$(y_p + y_h)'' + a(x)(y_p + y_h)' + b(x)(y_p + y_h) = \overbrace{y_p'' + a(x)y_p' + b(x)y_p}^{=h(x) \text{ enligt } (*)} + \overbrace{y_h'' + a(x)y_h' + b(x)y_h}^{=0} = h(x)$$

Sedan andra hållet: Låt y vara en lösning till $(*)$ och betrakta $y - y_p$

$$\Rightarrow (y - y_p)'' + a(x)(y - y_p)' + b(x)(y - y_p) = \underbrace{y'' + a(x)y' + b(x)y}_{=h(x)} - \underbrace{(y_p'' + a(x)y_p' + b(x)y_p)}_{=h(x)} = 0$$

har alltså formen $y = y_p + y_h$ (där $y_h = y - y_p$)

Linjära homogena ekvationer

Kommer betrakta bara linjära differentialekvationer av andra ordningen där $a(x)$ och $b(x)$ är konstanta, dvs. av formen

$$y'' + a y' + b y = h(x) \quad \text{med motsvarande homogena ekvation}$$

$$y'' + a y' + b y = 0. \quad \text{Utan inskränkning (linjaritet) kan vi anta att } a, b \in \mathbb{R}!$$

Ansats: $y = C \cdot e^{rx}$ leder till $y' = C \cdot r \cdot e^{rx}$, $y'' = C \cdot r^2 \cdot e^{rx}$

$$y'' + a y' + b y = C \underbrace{(r^2 + a r + b)}_{\neq 0} \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \underline{r^2 + a r + b = 0}$$

$p(r) = r^2 + a r + b$ kallas diff.ekv. karakteristiska polynom och $r^2 + a r + b = 0$ dess karakteristiska ekvation.

Sistnämnda har som vi vet (Sats 1.3) två nollställen $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$
 $\Rightarrow$ linjaritet $C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ är den allmänna lösningen (två frihetsgrader) om $r_1 \neq r_2$.

Sats 2.2

Antag att r_1, r_2 är rötterna till $r^2 + a r + b = 0$,

den karakteristiska ekvationen till $y'' + a y' + b y = 0$

Då ges den allmänna lösningen till den homogena diff.ekvationen

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \\ (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} & \text{om } r_1 = r_2 \end{cases}$$

där C_1, C_2 är godtyckliga konstanter.

Bevis: Ansats $y(x) = e^{wx} \cdot z(x)$ (vi väljer w senare)

$$y'(x) = z'(x) \cdot e^{wx} + z(x) \cdot w \cdot e^{wx} = e^{wx} (z' + w z), \quad y'' = z''(x) \cdot e^{wx} + z'(x) \cdot w \cdot e^{wx} + z'(x) \cdot w \cdot e^{wx} + z \cdot w^2 e^{wx} \\ = e^{wx} (z'' + 2w z' + w^2 z)$$

$$\text{Sätter vi in följer: } \underline{e^{wx} (z'' + 2w z' + w^2 z + a(z' + w z) + b z)} = 0$$

$$= e^{wx} (z'' + (2w + a) z' + (w^2 + a w + b) z)$$

$$\Leftrightarrow z'' + (2w + a) z' + (w^2 + a w + b) z = 0$$

Om vi väljer $w = r_1$ (nollställe till $p(r)$, obs. att $a = -(r_1 + r_2)$) fås

$$z'' + (2r_1 - r_1 - r_2) z' = 0 \Leftrightarrow z'' + (r_1 - r_2) z' = 0$$

$$\stackrel{1. \text{F.}}{\Leftrightarrow} (z' \cdot e^{(r_1 - r_2)x})' = 0 \Leftrightarrow z' = C \cdot e^{(r_2 - r_1)x} \stackrel{r_1 \neq r_2}{\Leftrightarrow} z = \frac{C}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + C_1$$

$$\Leftrightarrow y = e^{r_1 x} \cdot z = \frac{C}{r_2 - r_1} e^{r_2 x} + C_1 e^{r_1 x} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \text{ där } C_2 = \frac{C}{r_2 - r_1}$$

$$\text{Om } r_1 = r_2 \Rightarrow z' = C \Rightarrow z = Cx + D = C_1 x + C_2$$

□.

Ex: • Lös $y'' - y' - 6y = 0 \rightarrow p(r) = r^2 - r - 6, \quad r_1 = -2 \quad r_2 = 3$

den allmänna lösningen är då $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{3x}$

• Lös $y'' - 4y' + 4y = 0 \rightarrow p(r) = r^2 - 4r + 4, \quad r_{1/2} = 2$

den allmänna lösningen är då $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$

Sats 2.3 Antag att den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ till

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

har rötterna $r_{1/2} = \alpha \pm \beta i$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; jfr. sats 1.4)

Da ges den allmählichen Lösungen til den homogene diff. ev. av

$$y(x) = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x),$$

här A och B är godtyckliga konstanter

Beris: Sats 2.2 säger att den allmänna lösningen ges av $y = C_1 \cdot e^{\alpha x} + C_2 \cdot e^{\alpha x}$

$$= e^{\alpha x} (C_1 \cdot e^{\beta i x} + C_2 \cdot e^{-\beta i x}) = e^{\alpha x} [C_1 (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + C_2 (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))]$$
$$= e^{\alpha x} (\cos(\beta x) (C_1 + C_2) + \sin(\beta x) (C_1 - C_2)i)$$

$=: A$ $=: B$

□.

OBS: Vi kan välja C_1 och C_2 som komplexvärldiga konstanter så att A, B trillar ut som godtyckliga reella konstanter!

1. ex. $A = 9, B = 5$ las utar $C_1 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2}i, C_2 = \frac{9}{2} + \frac{5}{2}i$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = 9, (C_1 - C_2)i = (-\frac{10}{2}i) \cdot i = 5$$

Ex: Löse $y'' + 4y' + 5y = 0 \rightarrow p(r) = r^2 + 4r + 5$

har inga reella rötter: $r_{1/2} = 2 \pm i$

Sats 2.3
 $\Rightarrow$ Allmänna lösningen är $y(x) = e^{2x} (A \cos(x) + B \sin(x))$,
 där A, B är godtyckliga konstanter.

Anmerkung: • $\text{Lat } z = a + bi$

$$\begin{aligned} (e^{zx})' &= (e^{(a+bi)x})' = (e^{ax} \cdot e^{bix})' = (e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)))' \\ &= a e^{ax} e^{ibx} + e^{ax} (b \cdot (-\sin(bx)) + i \cdot b \cos(bx)) \\ &= a \cdot e^{(a+bi)x} + b \cdot e^{ax} (i^2 \sin(bx) + i \cos(bx)) \\ &= a \cdot e^{(a+bi)x} + ib e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) = e^{ibx} \\ &= e^{(a+bi)x} (a + ib) = e^{zx} \cdot z \end{aligned}$$

- Ofta studerar vi ett reellt (t.ex. fysikaliskt) problem och är intresserade av reellvärldiga lösningar. Därför är ifall av icke-reella rötter i karakteristiska ekvationen Sats 2.3 att föredra.