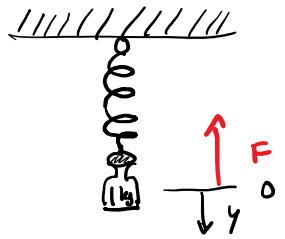


Harmonisk svängning

$$F = -ky$$

(k : fjäderkonstant; tyngdkraft ej relevant om $y=0$ syftar på jämviktsläge)

$$F = m \cdot a$$



Ex: $m = 1 \text{ kg}$, $k = 9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$; $y(0) = 1 \text{ m}$

Låt $y(t)$ beteckna positionen av massan vid tid t , $F(t)$ kraften som påverkar

$$\Rightarrow y''(t) = m \cdot a(t) = F(t) = -9y(t); \text{ vår diff. ekv. är alltså } y'' + 9y = 0.$$

$$p(r) = r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = 3i, r_2 = -3i \text{ är nollställena}$$

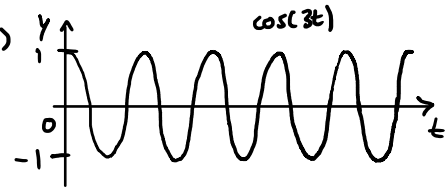
Den allm. lösningen ges av $y(t) = A \cos(3t) + B \sin(3t)$ (sats 2.3)

$$y(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow A = 1$$

$$y'(t) = -3A \sin(3t) + 3B \cos(3t); y'(0) = -3A \cdot 0 + 3B \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = \cos(3t)$$



Ann.: Den allmänna lösningen kan skrivas som $y(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(3t + \varphi)$ för någon fasvinkel φ .

Begynnelsevillkoren (läge + hastighet) bestämmer amplituden $\sqrt{A^2 + B^2}$ och fasvinkeln φ .

Vinkelhastigheten beror dock bara på m och k , inte begynnelsevillkoren!

Allmänt: • $my'' = -ky \rightarrow y(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ är lösningen för ett system utan dämpning.

• med dämpning $F_d(t) = -c y'(t)$, där c = dämpningskonstant
blir det $my'' = -c y' - ky \Leftrightarrow y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0$

$$\Rightarrow \text{karaktäristiska ekvationen } r^2 + \frac{c}{m} r + \frac{k}{m} = 0$$

$$\text{har lösningarna } r_{1/2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

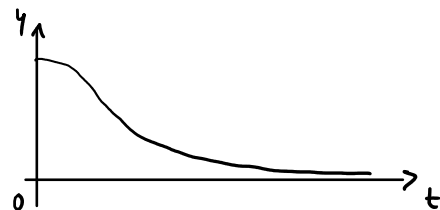
Fall 1: $c^2 - 4mk > 0$

$\Rightarrow$ två reella lösningar r_1, r_2 alltså enligt sats 2.2:

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

OBS: r_1, r_2 är negativa: $\sqrt{c^2 - 4mk} < \sqrt{c^2} = c$

Det kallas för överkritisk dämpning (c stor).



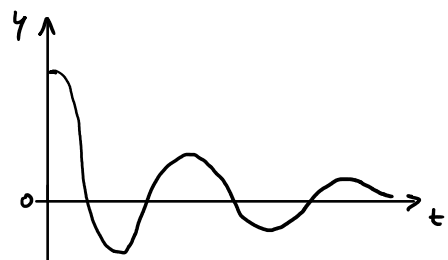
Fall 2: $c^2 - 4mk < 0$

$$\alpha \pm i\beta$$

$\Rightarrow$ två icke-reella lösningar (realdelen negativ)

$$y = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$$

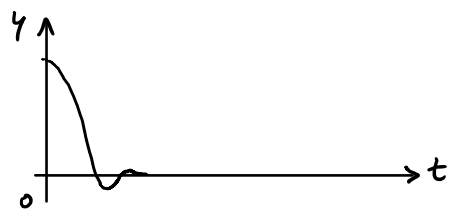
Det kallas för dämpad svängning (c liten)



Gränsvärdet $c^2 = 4mk$ ger en reell dubbelrot till
 kar. chr. $y = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}$

"kritisk dämpning"

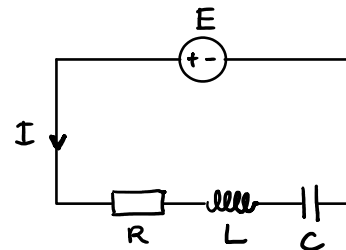
OBS: vid kritisk dämpning är massan snabbast
 tillbaka nära nollläget (dvs. jämvikten).



Ämne: Liknande situation i en RLC-krets

I strömkretsen finns

- resistor med resistans R
- induktor (spole) med induktans L
- kondensator med kapacitans C



=> För konstant spänning E uppfyller $I(t)$ (strömstyrkan)
 diff.ekvationen $I'' + \left(\frac{R}{L}\right) I' + \left(\frac{1}{LC}\right) I = 0$.

Jämförelse med fjädern: $R \hat{=}$ dämpning; $L \hat{=}$ massan; $C \hat{=}$ $\frac{1}{k}$, där k = fjäderkonstanten

Partikulär lösningar

För att bestämma alla lösningar till en linjär inhomogen diff. equation av andra ordningen (med konstanta koefficienter) dvs. $y'' + ay' + by = h(x)$ behöver vi (Sats 2.1) en partikulär lösning y_p .

För att hitta en sådan finns ingen generell metod, men en hel del lämpliga strategier som garanterat fungerar i vissa specialfall.

① Högerledet $h(x)$ är ett polynom

Då ansätter vi y_p också som ett polynom, närmare bestämt

$$y_p = x^k \cdot p(x), \quad \text{där } p(x) \text{ är ett polynom av samma grad som } h(x) \\ \text{(med } \text{grad}(h(x)) + 1 \text{ antal obestämda koefficienter) och} \\ k \text{ är den minsta ordningen av derivat, som dyker upp.}$$

Ex.: • $y'' - 2y' + 3y = 8 \rightarrow$ här $h(x) = 8$, ett polynom av grad 0; väljer $y_p = C$
 $\Rightarrow y_p' = y_p'' = 0$ instoppade i diff. eqv. ger $0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot C = 8 \Rightarrow C = \frac{8}{3}$
 $\Rightarrow y_p = \frac{8}{3}$ löser diff. equationen.

• $y'' + 4y' - y = 2x + 1 \rightarrow$ här $h(x) = 2x + 1$, ett polynom av grad 1, ansätter $y_p = Cx + D$
 $\Rightarrow y_p' = C, y_p'' = 0 \rightarrow 0 + 4C - (Cx + D) = 2x + 1$
dvs. (jämför koefficienter) $-C = 2$ (från $\text{för } x$) $\Rightarrow C = -2$
 $4C - D = 1$ (från $\text{för } 1$) $\Rightarrow D = -9$
dvs. $y_p = -2x - 9$ är en lösning.

• $y'' - 2y' = -4x + 4$ ansats: $y_p = Ax^2 + Bx = x(Ax + B)$
 $\rightarrow y_p' = 2Ax + B, y_p'' = 2A$
 $\rightarrow 2A - 2(2Ax + B) = -4x + 4$ alltså $-4A = -4 \Rightarrow A = 1$
 $2A - 2B = 2 - 2B = 4 \Rightarrow B = -1$
dvs. $y_p = x(x - 1)$

Anmärkning: • högre grads termer matchar inte högerledet om y finns med
• om y (och ev. $y', y'' \dots$) inte finns med ansätter vi ett polynom av högre grad
och väljer alla irrelevanta termer som 0.

(2) Högerledet är av form $h(x) = p(x) \cdot e^{\alpha x}$

där $p(x)$ är ett polynom

Strategi: ansätt $y(x) = e^{\alpha x} \cdot z(x)$ för en ny funktion z

→ Leder tillbaka till (1)

Ex: $y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^{2x}$

Ansats $y_p = e^{\alpha x} \cdot z(x) \rightarrow y_p' = \alpha(e^{\alpha x} \cdot z) + (e^{\alpha x} \cdot z')$
 $y_p'' = \alpha^2 e^{\alpha x} z + 2\alpha e^{\alpha x} z' + e^{\alpha x} z''$

i diff.ekv (här $\alpha = 2$)

$$2^2 \cdot e^{2x} z + 2 \cdot 2 e^{2x} z' + e^{2x} z'' + 3(2 e^{2x} z + e^{2x} z') + 2 e^{2x} z = (x+1)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} (4z + 4z' + z'' + 6z + 3z' + 2z) = (x+1)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow z'' + 7z' + 12z = x+1$$

Ansats $z = Ax + B \rightarrow z' = A, z'' = 0$ i diff.ekv. $7 \cdot A + 12(Ax + B) = x + 1$

som i (1)

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{12}, B = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{7}{12}\right) = \frac{5}{144}$$

dvs. $y_p = e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{12}x + \frac{5}{144}\right)$

Anmärkning: $h(x)$ komplexvärt

Om vi har ett högerled $h(x) = h_1(x) + i h_2(x)$ med h_1, h_2 reella funktioner använder vi återigen linjaritet för att dela upp problemet i två enkla (Lös diff.ekv. med högerled $h_1(x)$ och sedan med högerled $i h_2(x)$).

Ex: Hitta en partikulärlösning till ekvationen $y'' + 9y = \sin(3x)$

Strategi: hjälpekvation $y'' + 9y = e^{i3x} (= \cos 3x + i \sin 3x) \rightarrow$ använder (2) genom att

ansätta $y_p = e^{i3x} \cdot z \Rightarrow y_p' = (3i e^{i3x} \cdot z + e^{i3x} z'), y_p'' = -9 e^{i3x} \cdot z + 6i e^{i3x} z' + e^{i3x} z''$

i diff.ekv. $(-9z + 6i z' + z'' + 9z) e^{i3x} = e^{i3x} \Leftrightarrow 6i z' + z'' = 1$

Ansats: $z = Ax \rightarrow z' = A$ alltså $6i A + 0 = 1 \Rightarrow A = -\frac{i}{6}$

dvs. $y_p = -\frac{i}{6} x \cdot e^{i3x}$ är en lösning till $y'' + 9y = e^{i3x}$

$= -\frac{i}{6} x (i \cos(3x) - \sin(3x)) \Rightarrow -\frac{x}{6} \cos(3x) = \text{Im}(y_p)$ löser $y'' + 9y = \sin(3x)$

Anmärkning: Vi fick en partikulärlösning till $y'' + 9y = \cos(3x)$ på köpet:

nämigen $\text{Re}(y_p) = \frac{x}{6} \sin(3x)$

Ex: Bestäm en lösning till $y'' + 9y = 3 \sin 3x - \cos 3x$

Linjaritet ger att $y_p = 3 \left(-\frac{x}{6} \cos(3x)\right) - \frac{x}{6} \sin(3x)$ löser denna inhomogena diff.ekvation.

Anmärkning: "Gissa" är en väg till en partikulärlösning

Ex: $y'' + 9y = \sin(2x)$

Gissning: $y_p = A \cdot \sin(2x), y_p' = 2A \cdot \cos(2x)$

$y_p'' = -4A \sin(2x)$

$(-4A + 9A) \sin(2x) = \sin(2x) \Rightarrow A = \frac{1}{5}$ fungerar.

$y'' + 9y = \sin(3x)$

Gissa: $y_p = A \cdot \sin(3x), y_p' = 3A \cos(3x)$

$y_p'' = -9A \sin(3x)$

i diff.ekv. $(-9A + 9A) \sin(3x) = \sin(3x) \quad \underline{i}$

③ Variation av konstanter

När vi har hittat lösningarna till det homogena problemet y_h sätter vi in en i det inhomogena problemet och låtsas att konstanterna är en funktion av x :

Ex: $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

k.ekv: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$, den allmänna lösningen till det homogena problemet ges av $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

$y_p = C(x) \cdot e^x$ (strategi: ta en homogen lösning och ansätt $C \rightarrow C(x)$)

$y_p' = C(x) \cdot e^x + C'(x) \cdot e^x$, $y_p'' = (C'(x) + 2C'(x) + C''(x)) e^x$

i diff.ekv. $[C + 2C' + C''] - 3(C + C') + 2C = e^{3x}$

$\Rightarrow C'' - C' = e^{2x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$ (punkter (där $C'(x) = e^{2x}$, $C''(x) = 2e^{2x} \rightarrow C'' - C' = e^{2x}$))

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot e^x = \frac{1}{2} e^{3x}$

$y' = \frac{y}{1-x} + x-1$, $x > 1$

Det homogena problemet $y' - \frac{y}{1-x} = 0 \stackrel{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{y'}{y} = \frac{1}{1-x}$

leder genom integration (separabel diff.ekv.) till

$\ln|y| = -\ln|1-x| + C \stackrel{x > 1}{=} -\ln(x-1) + C$

$\Rightarrow y = \pm e^C \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{B}{x-1}$, där $B \neq 0$ godtycklig konstant

(genom att testa ser vi) $y \equiv 0$ är en lösning, alltså är $y_h = \frac{B}{x-1}$, $B \in \mathbb{R}$

alla lösningar till den homogena diff.ekvationen.

Ansats: $y_p = \frac{B(x)}{x-1} \Rightarrow y_p' = \frac{B'(x)}{x-1} - \frac{B(x)}{(x-1)^2}$

stoppas man in det får $\frac{B'}{x-1} - \frac{B}{(x-1)^2} = -\frac{B}{(x-1)^2} + x-1$

$\Leftrightarrow B' = (x-1)^2$ alltså $B(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3$ punkter och

ges partikulärlösningen $y_p = \frac{1}{3}(x-1)^2$

Alla lösningar till det inhomogena problemet är då $y = \frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{B}{x-1}$, $B \in \mathbb{R}$.