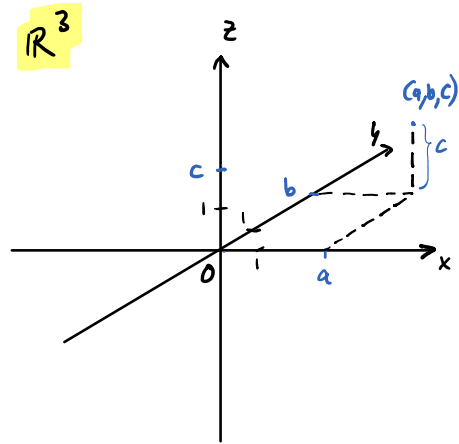
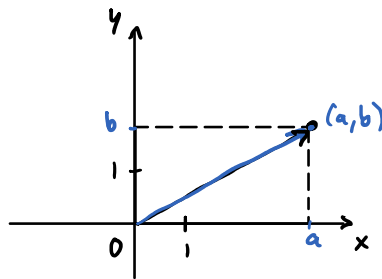


3

Vektorer

3.1 Vektorbegreppet

Koordinatsystem:
vinkelrätta koordinat axlar
med längdskala



Vi betraktar mer allmänna $\mathbb{R}^n := \{(a_1, \dots, a_n); a_i \in \mathbb{R}\}$

Def. 3.1 Vektor

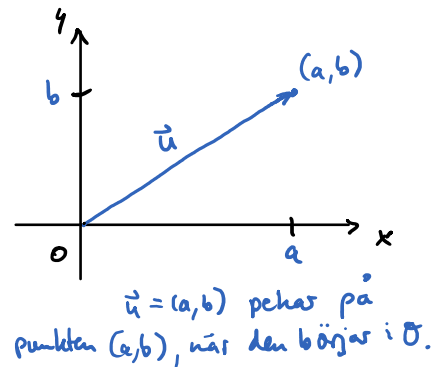
En n -dimensionell vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ är en n -tupel

$$\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

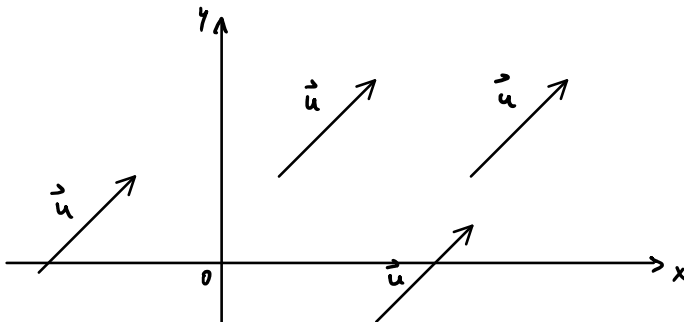
av reella tal a_i . Dessa kallas vektorns koordinater.

OBS: En vektor $\vec{u}$ kan

visualiseras som en pil (dvs. riktad sträcka) eller
en punkt i tygden, nämligen den vår pil $\vec{u}$ pekar på när
vi låter den ha origon O som startpunkt.



"Vektorer har en längd och en riktning, men ingen plats."



- parallell förflyttning
 - riktade sträckor!
- med motsatt håll är det
inte samma vektor!
- $-\vec{u}$

Addition av vektorer

För $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ definieras summan $\vec{u} + \vec{v}$
genom koordinatvis addition, dvs.

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{=\vec{u}} + \underbrace{(b_1, \dots, b_n)}_{=\vec{v}} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

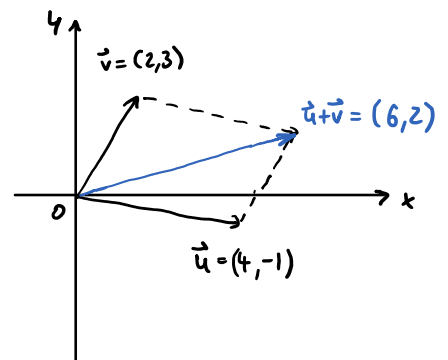
Vektoraddition är

kommutativ, dvs. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

och associativ, dvs. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

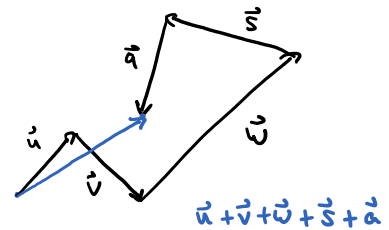
(vi behöver alltså inte skriva med parenteser i en
summa med fler än två summander)

(jfr. med kraft diagram i fysik)

Exempel:

"Sj-regel": Det är bara start och slutpunkten som räknas!

Adderas vi fler än två vektorer kan en visualisering se så här ut:



Multiplikation med reella tal

Multiplikation med en skalar sker också koordinatvis: $\vec{u} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

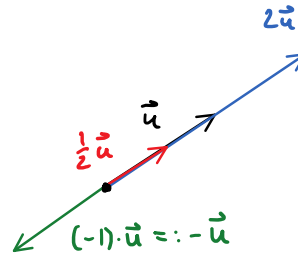
$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$$

För $\lambda > 1$: förlängas vektorn

$0 < \lambda < 1$: vektorn förkortas

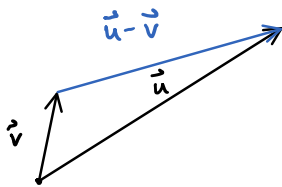
$\lambda = 0$: svaret är då nollvektorn $\vec{0} = (0, \dots, 0)$

$\lambda < 0$: resulterande vektor pekar åt motsatt håll



Differensen av två vektorer definieras då som

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v} \quad (\text{lägger till } \vec{u} \text{ pilen } \vec{v}, \text{ men motsatt riktad!})$$

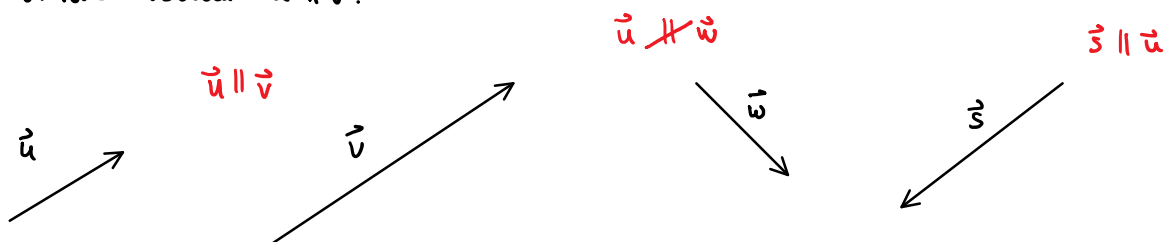


1.2 Egenskaper hos vektorer

Vi säger att $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ är parallella om det finns ett tal $\lambda \in \mathbb{R}$ så att $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ (eller $\vec{v} = \lambda \vec{u}$).

känns onödigt men behövs om $\vec{v} = \vec{0}$ (som är || med alla vektorer, $\lambda = 0$)

Man skriver ibland $\vec{u} \parallel \vec{v}$.



Exempel: • Är $(12, -3)$ och $(-4, 1)$ parallella?

Försöker $(12, -3) = \lambda(-4, 1)$

jämför koordinatvis: $12 = -4\lambda$ och $-3 = \lambda \Rightarrow (12, -3) = -3(-4, 1)$
de är alltså parallella.

• Avgör om $\vec{u} = (3, 0, -2, -5)$ och $\vec{v} = (-2, 0, \frac{4}{3}, 3)$ är parallella.

koord. ger: $3 = -2\lambda$, $0 = \lambda \cdot 0$, $-2 = \frac{4}{3}\lambda$, $-5 = 3\lambda$

$$\lambda = -\frac{3}{2}$$

✓

$$\lambda = -\frac{3}{2}$$

$$\lambda = -\frac{5}{3}$$

olika värden för olika koordinater betyder att de inte är parallella.