

Linjärskombination

Def. 3.2

En vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ är en linjärskombination av vektorena $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$ om det finns tal $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ så att

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_m \vec{u}_m$$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}$ är en linjarkomb. av $\vec{v}$

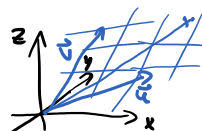
OBS: λ_i måste inte vara $\neq 0$

Ex: $\left. \begin{aligned} \vec{v}_1 &= (0, 3, -2), \vec{v}_2 = (2, 0, -1), \vec{v}_3 = (-4, 2, 0) \\ \vec{u}_1 &= (1, 1, -1), \vec{u}_2 = (2, -1, 0) \end{aligned} \right\} \in \mathbb{R}^3$

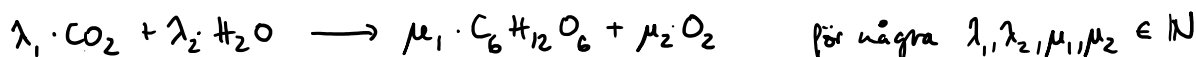
Är $\vec{v}_i$ en linjärskomb. av $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

- $\vec{v}_1 = (0, 3, -2) = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 \\ 3 = 1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 \\ -2 = -1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 \rightarrow \vec{v}_1 \text{ är en l.k. av } \vec{u}_1, \vec{u}_2$
- $\vec{v}_2 = \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \mu_1 + 2\mu_2 \\ 0 = \mu_1 - \mu_2 \\ -1 = -\mu_1 \end{cases} \rightarrow \mu_1 = 1, \mu_2 = 1 \text{ och } 2 \neq 3$
- $\vec{v}_3 = 0 \cdot \vec{u}_1 + (-2) \vec{u}_2$ är en l.k. av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{v}_3$ är inget l.k. av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$

Anm.: Precis som vi hade att alla vektorer som är parallella med en vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ utgör en linje (som man placerar de i origo) är det nu så att alla vektorer som är linjärskombinationer av $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ ligger i ett plan som spänns upp av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^3$

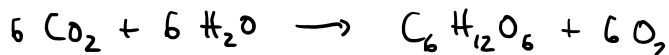


Ex.: I fotosyntesen (kemisk reaktion i planter) omvandlas koldioxid och vatten med hjälp av ljus (energi) till socker och syre:



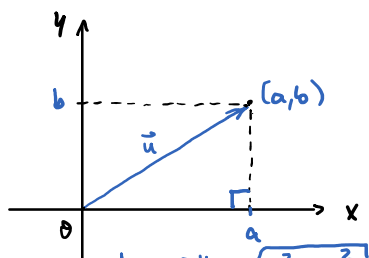
vi skriver C som första, O som andra och H som tredje koordinaten

$$\left. \begin{aligned} \text{C: } \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 &= \mu_1 \cdot 6 \\ \text{O: } 2\lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 &= 6 \cdot \mu_1 + 2 \mu_2 \\ \text{H: } 2\lambda_2 &= 12 \cdot \mu_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{sätta } \mu_1 = 1 \text{ ger } \lambda_2 = 6, \lambda_1 = 6 \\ &\mu_2 = 6 \end{aligned}$$



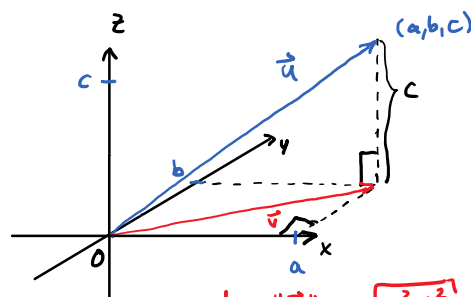
Längd av en vektor

$\mathbb{R}^2$:



$$d = \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Pythagoras})$$

$\mathbb{R}^3$



$$\begin{aligned} d = \|\vec{v}\| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Pythagoras:
 $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + c^2$

I allmän dimension n:

Längden av $\vec{u} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ definieras som

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

OBS: $\|\lambda \cdot \vec{u}\| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \dots + \lambda^2 a_n^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$

Ex: $\vec{u} = (3, -4)$, $\vec{v} = (2, -1, 0, 3)$, $\vec{w} = \vec{0}$
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $\vec{v} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
 $\|\vec{0}\| = \sqrt{0^2 + \dots + 0^2} = 0$.

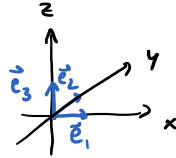
En vektor med längd 1 kallas enhetsvektor.

Längs koordinataxlar: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

Vilken som helst vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ kan normeras till längd 1

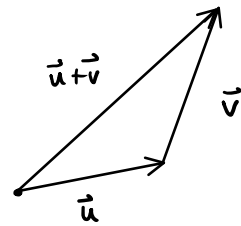
genom $\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$. ($\Rightarrow \|\vec{e}\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \right\| = 1$)

Ex.: $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \leadsto \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, -1)$.



För två vektorer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gäller den så kallade
 triangel olikheten $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

beris för allmänna $n \in \mathbb{N}$: överskurs.



3.3 Skalarprodukt

Def. 3.3 Skalarprodukten av två vektorer $\vec{u} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{v} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$
 betecknas $\vec{u} \circ \vec{v}$ och definieras genom

$$\vec{u} \circ \vec{v} = (a_1, \dots, a_n) \circ (b_1, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Vi multiplicerar alltså koordinaterna och adderar sedan för att få ett reellt tal som svar.

Ex.: $\vec{u} = (2, -3, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, 2, 1, 4)$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = (2, -3, 0, 1) \circ (-1, 2, 1, 4) = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -4$$

$$\vec{u} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \vec{u} \circ \vec{u} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \|\vec{u}\|^2$$

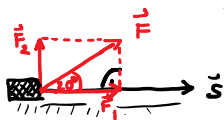
Från definitionen ovan följer omedelbart följande räknelagar:

$$\begin{aligned} \vec{u} \circ \vec{v} &= \vec{v} \circ \vec{u} \quad (\text{kommutativ}) \\ (\lambda \cdot \vec{u}) \circ \vec{v} &= \vec{u} \circ (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \circ \vec{v}) \quad (\text{linjär}) \\ (\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} &= \vec{u} \circ \vec{w} + \vec{v} \circ \vec{w} \quad (\text{distributiv}) \end{aligned}$$

Beris: Följer direkt av definitionen plus att produkten av reella tal är kommutativ, linjär och distributiv.

Fysikalisk motivering

$\|\vec{s}\| = 10\text{ m}$, $\|\vec{F}\| = 200\text{ N}$. Beräkna arbetet W .

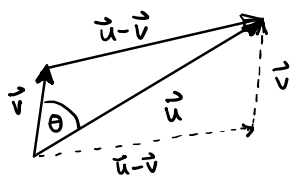


OBS: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$

$W = \text{arbete} = \text{Kraft} \cdot \text{Vägg}$ (där kraften verkar längs vägen)

$$\cos 20^\circ = \frac{\|\vec{F}_1\|}{\|\vec{F}\|} \Rightarrow \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}\| \cdot \cos 20^\circ$$

Det utförda arbetet är $W = \|\vec{F}_1\| \cdot \|\vec{s}\| = 200\text{ N} \cdot \cos(20^\circ) \cdot 10\text{ m} \approx 1880\text{ J}$.



Cosinussats för triangeln som bildas av $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$:

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

E enligt räknelagarna för skalär produkt för vi

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Det följer alltså

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

där θ är (den minsta) vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ (dvs. $0 \leq \theta \leq \pi$)

Anm.: Om en av $\vec{u}, \vec{v}$ är nollvektor:

Då är θ odefinierad, men $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ändå, dvs. formeln gäller t.o.m. när en av dem är nollvektor.

I exemplet ovan är alltså $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Ex.: Beräkna vinkeln θ mellan $\vec{u} = (1, 2)$ och $\vec{v} = (3, 1)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{ef. när } \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{10}; \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2) \cdot (3, 1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$



Ortogonalitet

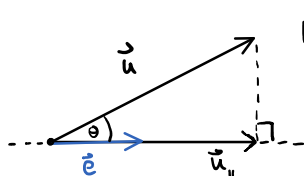
Def. 3.4 Vektorerna $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kallas ortogonala om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Man skriver ibland $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ex: $(3, 2, 1)$ och $(-1, 4, x)$ är ortogonala för vilket x ?
 $(3, 2, 1) \cdot (-1, 4, x) = -3 + 8 + x = 0$
 $\Leftrightarrow x = -5$.

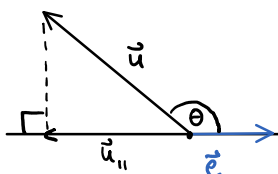
OBS: Då $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ är detta en generalisering av ortogonalitet i $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

$\vec{u}, \vec{v}$ är ortogonala om de är vinkelräta eller en av dem är nollvektor.

Def. 3.5 För två vektorer $\vec{u}, \vec{e} \in \mathbb{R}^n$, där $\|\vec{e}\| = 1$ definieras den ortogonala projektionen $\vec{u}_{||}$ av $\vec{u}$ på $\vec{e}$ enligt
$$\vec{u}_{||} = (\vec{u} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{e}$$



$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{||}\| &= \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}\| \cdot \cos\theta \\ &= \vec{u} \cdot \vec{e} \end{aligned}$$



OBS: Fungerar både när θ är spetsig (dvs. $\vec{u} \cdot \vec{e} > 0$, vänster) och när θ är trubbig ($\vec{u} \cdot \vec{e} < 0$, höger).

Ann: $\vec{u}_\parallel = 0$ om $\vec{u} \perp \vec{e}$

Ex: Bestäm den ortogonala projektionen av $\vec{u} = (2, 4, -1)$ på $\vec{v} = (1, -2, 3)$.

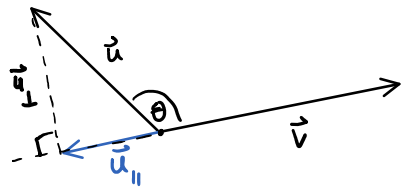
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1, -2, 3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 4, -1) \cdot (1, -2, 3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} (2 + (-8) + (-3))$$

$$= -\frac{9}{\sqrt{14}} \Rightarrow \vec{u}_\parallel = -\frac{9}{\sqrt{14}} \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1, -2, 3) \right) = -\frac{9}{14} (1, -2, 3)$$



$\vec{u}_\perp$ (den förblivna komponenten kan beräknas till

$$\vec{u} = \vec{u}_\parallel + \vec{u}_\perp \Rightarrow \vec{u}_\perp = \vec{u} - \vec{u}_\parallel = (2, 4, -1) + \frac{9}{14} (1, -2, 3)$$

$$= \left(\frac{27}{14}, \frac{38}{14}, \frac{13}{14} \right)$$

$$\vec{u}_\perp \cdot \vec{v} = \frac{1}{14} (27, 38, 13) \cdot (1, -2, 3) = \frac{1}{14} (27 - 76 + 39) = 0 \quad \square$$