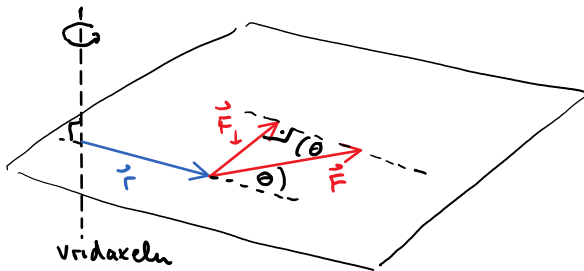


3.4 Vektorprodukt

Fysikalisk motivering

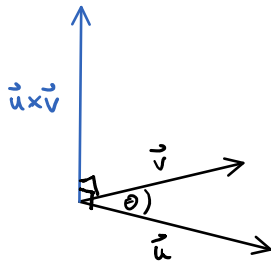
Vridmomentet ges av $(v_d) = s \cdot F_{\perp}$, där s är hävstångens längd, $F_{\perp}$ komponenten av kraften som verkar vinkelrätt mot hävstången



$$(v_d) = \|s\| \cdot \|F_{\perp}\| = \|s\| \cdot \|F\| \cdot \sin \theta$$

Vill definiera ytterligare en produkt av vektorer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ som ger en vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ som svar med följande egenskaper:

$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$ samt $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$,
där som vanligt θ betecknar vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.
Dessutom ska $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{u} \times \vec{v}$ utgöra ett högersystem.



Def. 3.6 Låt $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då definieras deras vektorprodukt som

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

- kallas ibland "kryssprodukt"
- Minnesregel för beräkningen:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & + & & + & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ \wedge & & & \wedge & & \wedge & \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 & \end{array}$$

Ex: $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (-1, 3, 4)$

SR: $\begin{array}{ccccccc} & + & & + & & + & \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & & \\ \wedge & & & \wedge & & \wedge & \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 & 4 & \end{array}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2 \cdot 4 - 3 \cdot (-2), (-2) \cdot (-1) - 4 \cdot 1, 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2) = (14, -2, 5)$$

Test: $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (1, 2, -2) \cdot (14, -2, 5) = 14 - 4 - 10 = 0$
 $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (-1, 3, 4) \cdot (14, -2, 5) = -14 - 6 + 20 = 0$

Sats 3.1 Låt $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Då gäller $\vec{u} \perp \vec{u} \times \vec{v}$ och $\vec{v} \perp \vec{u} \times \vec{v}$.

Bevis: $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$
 $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_1 b_3 + a_3 a_1 b_2 - a_3 a_2 b_1 = 0$
 Samma beräkning visar $\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{v} = 0$. $\square$.

Vidare gäller följande räknelagar:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{u} &= -\vec{u} \times \vec{v} \quad (\text{antikommutativ}) \\ (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} &= \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v}) \quad (\text{linjär}) \\ (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \quad (\text{och } \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}) \quad (\text{distributiv}) \end{aligned}$$

Bevis: elementärt
se boken s. 26

I samspel med skalärprodukten gäller dessutom

$$(a) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \quad (\text{skalär trippelprodukt})$$

$$(b) \quad \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad (\text{vektoriell trippelprodukt})$$

Beviset följer ur definitionerna men kräver en lite teknisk beräkning.
Se boken s. 27.

Följande sats ger en geometrisk tolkning av vektorprodukten längd:

Sats 3.2 Låt $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Då gäller det att

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta,$$

där θ är som vanligt vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Bevis: Enligt (a) gäller $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v}))$

enligt (b) är $\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$

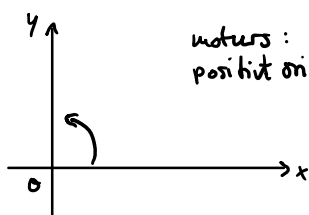
$$\Rightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot [(\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{v}] = (\vec{v} \cdot \vec{v}) (\vec{u} \cdot \vec{u}) - (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 = \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{u}\|^2 - (\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta)^2$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta. \text{ De } \sin \theta \geq 0 \text{ för } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ kan vi dra } \sqrt{} \text{ och är klara. } \square.$$

Anmärkning: Vektorprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ blir som störst (i vektorlängd) när θ är $\pi/2$, skalärprodukten $\vec{u} \cdot \vec{v}$ som störst (i absolutbelopp) när θ var antingen 0 eller π .

Orientering

$\mathbb{R}^2$

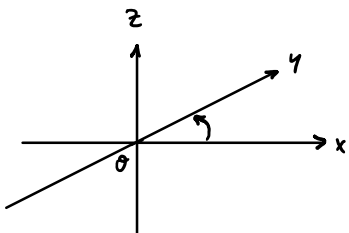


moturs:
positivt orienterat

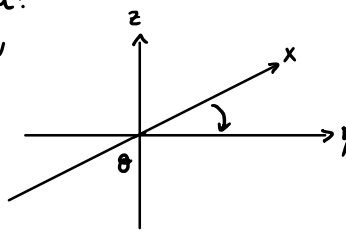


medurs:
negativt orienterat

$\mathbb{R}^3$

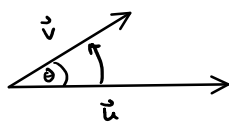


moturs, sett oifrån:
positivt orienterat,
högersystem

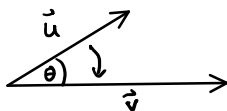


medurs, sett oifrån:
negativt orienterat,
vänstersystem.

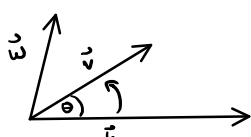
För godtyckliga vektorer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$:



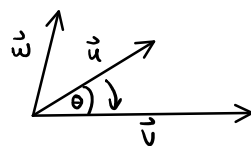
$\vec{u}, \vec{v}$ positivt orienterade



$\vec{u}, \vec{v}$ negativt orienterade



$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ positivt orienterade



$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ negativt orienterade

$\Rightarrow \vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ och $\vec{u}, \vec{v}, (-\vec{w})$ positivt orienterade!

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ är positivt orienterade (utgör ett högersystem).

4 Vektorer som geometriska objekt

4.1 Punkter och vektorer

I ett givet koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ kan vi beskriva punkter med hjälp av koordinater, t.ex. $P: (4, 1)$, $Q: (2, 2)$, $R: (-1, 0)$

Vektoraddition via sj-regel:

$$\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}.$$

Som vanligt identifierar vi punkten P med motsvarande Ortsvektor $\vec{OP}$.

Vektorn $\vec{QP}$ (den riktade sträckan från Q till P)

$$\text{ges då av } \vec{QP} = \vec{QO} + \vec{OP} = -\vec{OQ} + \vec{OP} = P - Q$$

minnesregel: "slutpunkt minus startpunkt"

$$\text{här: } \vec{QP} = (4, 1) - (2, 2) = (2, -1)$$

OBS: Samma vektor fås fram som riktad sträcka från $S: (-3, 1)$ till $R: (-1, 0)$

Anmärkning: Genom kopplingen mellan punkter och motsvarande Ortsvektorer talar man ibland om planet som " $\mathbb{R}^2$ " (alla två-dimensionella vektorer) och rummet som $\mathbb{R}^3$.

Ex.: Avgör om triangeln med hörn $P: (-3, 0, -4)$, $Q: (1, 2, 0)$ och $R: (2, 4, -2)$ är rätvinklig (ligger snett i rummet, alltså " $\mathbb{R}^3$ ").

$$\vec{PQ} = (1, 2, 0) - (-3, 0, -4) = (4, 2, 4)$$

$$\vec{PR} = (2, 4, -2) - (-3, 0, -4) = (5, 4, 2)$$

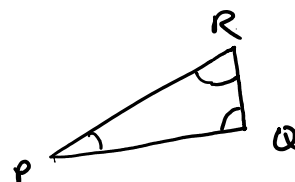
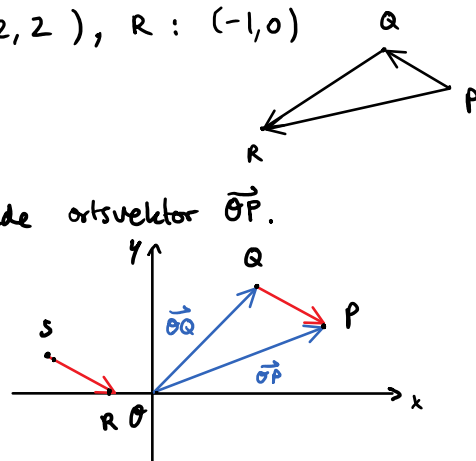
$$\vec{QR} = (2, 4, -2) - (1, 2, 0) = (1, 2, -2)$$

$\vec{PR}$ verkar vara längst.

$$\begin{aligned} \text{Pythagoras? } \|\vec{PR}\|^2 &= 5^2 + 4^2 + 2^2 = 45 \\ \|\vec{PQ}\|^2 &= 36, \quad \|\vec{QR}\|^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\vec{QR} \cdot \vec{QP} = (1, 2, -2) \cdot (-4, -2, -4) = -4 - 4 + 8 = 0 \Rightarrow \vec{QR} \perp \vec{QP}.$$

$\Rightarrow \Delta$ har en rät vinkel i hörn Q .



$$\Rightarrow \|\vec{PR}\|^2 = \|\vec{PQ}\|^2 + \|\vec{QR}\|^2$$

4.2 Linjer och plan

Linjer på parameterform

En linje l bestäms av en punkt P_0 på l (stödpunkt) och en riktningsvektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ som anger linjens riktning.

En godtycklig punkt P på l uppfyller då $\vec{P_0P} \parallel \vec{u}$. Och om $\vec{P_0P_1} \nparallel \vec{u}$, så ligger P_1 inte på l .

Med $P: (x, y)$, $P_0: (x_0, y_0)$ och $\vec{u} = (a, b)$ kan vi skriva ner linjens ekvation:

$$l: \vec{OP} = \vec{OP_0} + t \cdot \vec{u} \quad \text{dvs.} \quad (x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b) \quad t \in \mathbb{R}$$

Alla punkter (x, y) på l ges alltså av

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

t kallas parameter, ekvationen linjens parameterform

Ex.: Bestäm en ekvation på parameterform för linjen genom $P: (1, 2)$ och $Q: (6, 5)$

Ligger punkterna $P_1: (-1, 1)$ och $P_2: (-\frac{1}{3}, \frac{6}{5})$ på denna?

Väljer: $P_0: (1, 2)$, $\vec{r} = \vec{PQ} = (6, 5) - (1, 2) = (5, 3)$

$$l: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$P_1 \in l$? Om så är fallet måste det finnas $t \in \mathbb{R}$ så att

$$\begin{aligned} -1 &= 1 + 5t & \text{och} & \quad 1 = 2 + 3t \Rightarrow P_1 \notin l \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{2}{5} & \text{och} & \quad t = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P_2 \text{ då? } -\frac{1}{3} = 1 + 5t \quad \text{och} \quad \frac{6}{5} = 2 + 3t \Leftrightarrow t = -\frac{4}{15} \quad \text{och} \quad t = -\frac{4}{15} \checkmark \Rightarrow P_2 \in l.$$

Anm.: Parameterformen är allt annat än unik.

o många val för stödpunkten och riktningsvektorn!

- linje vs. sträcka: "linje" avser en rak strål, oändlig åt båda håll; en sträcka kan fås genom att inskränka parametervärden, t.ex. $S: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{17}.$

- precis samma härledning i $\mathbb{R}^3$ ger med $P: (x, y, z)$, $P_0: (x_0, y_0, z_0)$ på l och $\vec{u} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ (dess riktning):

$$l: \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Parameterform av en linje i rummet

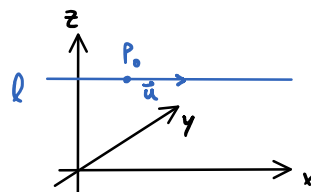
Ex.: l genom $P: (2, -2, 1)$ och $Q: (3, 0, -2)$. Väljer P som stödpunkt och $\vec{u} = \vec{PQ} = (3, 0, -2) - (2, -2, 1) = (1, 2, -3)$

$$l: \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot t \\ y = -2 + 2 \cdot t \\ z = 1 - 3 \cdot t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Specialfall: $\vec{u} \parallel$ med koordinataxlar:

$\vec{u} \parallel x$ -axeln: t.ex. $\vec{u} = (1, 0, 0) = \vec{e}_1$

$$l: \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$



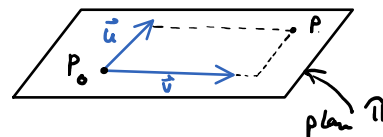
Plan på parameterform

Plan i rummet är två-dimensionella och spänns upp av två riktningsvektorer $\vec{u}, \vec{v}$

Punkt P ligger i planet Π då och endast då

P : $P_0 +$ linjärkombination av $\vec{u}$ och $\vec{v}$

dvs. $\vec{P_0P} = s\vec{u} + t\vec{v}$ för några $s, t \in \mathbb{R}$.



Med $P_0: (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ och $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ samt $P: (x, y, z)$ får vi planets parameterform

$$(x, y, z) = (x_0 + s \cdot a_1 + t \cdot a_2, y_0 + s \cdot b_1 + t \cdot b_2, z_0 + s \cdot c_1 + t \cdot c_2)$$

alltså

$$\Pi: \begin{cases} x = x_0 + s \cdot a_1 + t \cdot a_2 \\ y = y_0 + s \cdot b_1 + t \cdot b_2 \\ z = z_0 + s \cdot c_1 + t \cdot c_2 \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Igen: inte unikt!

Ex.: Hitta en ekvation på parameterform för planet Π i $\mathbb{R}^3$ som punkterna $P: (1, 1, 1)$, $Q: (2, -1, 3)$ och $R: (3, 2, -5)$ ligger i.

Ligger $P_1: (4, 5, -13)$ också i Π ?

Väljer P som stödplanet. För att ta fram två riktningsvektorer

$$\text{kan vi bilda } \vec{PQ} = (2, -1, 3) - (1, 1, 1) = (1, -2, 2)$$

$$\vec{PR} = (3, 2, -5) - (1, 1, 1) = (2, 1, -6)$$

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, -2, 2) + t(2, 1, -6) \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Pi: \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 1 - 2s + t \\ z = 1 + 2s - 6t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$P_1 \in \Pi$?

$$4 = 1 + s + 2t \Rightarrow s = 4 - 1 - 2t = 3 - 2t$$

$$\begin{cases} s = 3 - 2t \\ -13 = 1 + 2s - 6t \end{cases} \Rightarrow -13 = 1 + 2(3 - 2t) - 6t \Rightarrow -13 = 7 - 4t - 6t \Rightarrow -20 = -10t \Rightarrow t = 2$$

Parametervälet $s = -1$ och $t = 2$ gör att alla tre ekvationer är uppfyllda, därmed ligger punkten P_1 i planet Π .