GAMMAFUNKTIONEN ELLER VARFÖR $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$

MARTIN HALLNÄS

Abstract. Denna text utgör anteckningar inför en gästföreläsning i kursen MVE235 Matematisk Orientering på Chalmers civilingenjörsprogram Teknisk Matematik den 4:e december 2019.

Inspiration:

Philip J. Davis, *Euler's integral: A historical profile of the Gamma function*, The American Mathematical Monthly, Vol. 66, No. 10 (1959), pp. 849–869.

1. Interpolationsproblem

Vår historia tar sin början år 1729 i en brevväxling mellan Leonard Euler, då endast 22 år gammal, och Christian Goldbach, en "spindel i nätet" i kontakt med många av dåtidens stora tänkare och upphovsmakare till, den ännu olösta, "Goldbach's förmodan" (varje positivt jämnt heltal ≥ 4 kan uttryckas som en summa av två primtal). I centrum befinner sig ett till synes enkelt interpolationsproblem som varken Goldbach eller storheter som Daniel Bernoulli eller James Stirling hade lyckats lösa.

Men vad menar vi med *interpolation*?

Example 1.1. *Betrakta de triangulära talen*

n	1	2	3	4
T_n	1	$1+2$	$1+2+3$	$1+2+3+4$

(som ger antalet objekt som kan arrangeras i en liksidig triangel där varje sida innehåller n objekt.) Med elementära tekniker visas formeln

$$T_n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

vilken har (åtminstone) två intressanta konsekvenser:

- *oavsett n fås T_n efter* tre *räkneoperationer,*
- *n behöver ej vara ett (positivt) heltal, t.ex. då $n = 2\frac{1}{2}$ fås*

$$T_{2\frac{1}{2}} = 4\frac{3}{8},$$

dvs. formeln interpolerar (med enkla medel) mellan tidigare kända värden.

Example 1.2. *För $m = 1, 2, 3, \ldots$ definieras*

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ st. termer}}$$

Date: December 4, 2019.

men vad betyder $a^{7\frac{1}{3}}$? Detta interpolationsproblem löses med definition

$$a^0 = 1, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \ldots$$

vilken motiveras av att potenslagarna fortsatt gäller.

Låt oss återvända till de triangulära talen T_n. Ersätter vi + med · erhåller vi $n!$ (utläses: n fakultet):

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040

"Intelligenstest": Vilket tal ska vi skriva mellan 120 och 720? (Med andra ord, $5\frac{1}{2}! = ?$)

Eulers svar: $287,8852\cdots$. Hadamards svar: $280,3002\cdots$.

Men hur kom Euler och Hadamard fram till sina svar? Vi följer historien och börjar med Euler.

2. Gammafunktionen

Experimenterandes med oändliga produkter observerade Euler

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots = n!$$

och för $n = 1/2$ gav vänsterledet (efter kvadrering och division med 2) John Wallis då berömda produkt

$$\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\left(\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\right)\cdots = \frac{\pi}{2}.$$

Alltså, produkten gav heltal då n var ett heltal och ett utryck innehållande π då $n = 1/2$. Talet π associeras vanligtvis med cirklar och deras areor, som i sin tur associeras med integraler, och Euler kände redan till integraler som uppvisade samma typ av fenomen. Så startade Eulers jakt på en integralrepresentation för $n!$, se t.ex. Davis (1959) för en detaljerad beskrivning av Eulers resonemang. Slutresultatet blev den nu berömda formeln

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt.$$

Övning: Bevisa Eulers integralformel för $n!$ genom att använda partiell integration samt induktion över n.

Adrien Marie Legendre (1752–1833) modifierad integralen och introducerade Gammafunktionen

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Grundläggande resultat från analysen ger att $\Gamma(x)$ är väldefinierad för alla reella tal $x > 0$ och vi har

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Vi kan nu förklara föreläsningens titel:

$$(-1/2)! = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Bevis. Genom variabelbytet $t = u^2$ ($\Rightarrow t^{-1/2}dt = 2du$) fås

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du$$

vilken kan beräknas med ett klassiskt 'trick':

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du &= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}dv\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2}dudv\right)^{1/2}\end{aligned}$$

och variabelbytet

$$u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta,\ (\Rightarrow\ dudv = rdrd\theta),$$

ger

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2}dudv = \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^\infty re^{-r^2}dr = 2\pi\cdot\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=\infty} = \pi.$$

□

3. Tillämpningar

3.1. **Geometri.** Kom ihåg att den vanliga (2-)sfären med radie $r = 1$ ges av

$$S^2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Generalisering till godtycklig dimension $n = 1, 2, 3, \ldots$ ger n-sfären

$$S^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

vilken har arean

$$2\pi^{n/2}\Big/\Gamma(n/2).$$

3.2. **Sannolikhetsteori.** Livslängden (i tid t) för t.ex. elektroniska komponenter modelleras ofta med en gammafördelning

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}t^{\alpha-1}e^{-t/\beta},\ (t > 0).$$

3.3. **Talteori.** Riemannhypotesen – ett av "the Millenium Problems", värt en miljon dollar, och av central betydelse för hur primtalen är distribuerade – handlar om Riemanns zeta-funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s},\ (s > 1).$$

Två av dess centrala egenskaper är integralformeln

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}dt$$

och reflektionsformeln

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\pi s/2)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

4. En filosofisk slutkläm

Är $\Gamma(x+1)$ den "bästa" generaliseringen av $n!$ bortom de positiva hela talen? Hadamard föreslog istället

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(1-x)} \frac{d}{dx} \log \big[\Gamma((1-x)/2)\Gamma(1-x/2)\big].$$

Sitt krångligare utseende till trots har den en fördel över gammafunktionen: $F(x)$ är väldefinierad för alla $x \in \mathbb{R}$ medan $\Gamma(x)$ har singulariteter i punkterna $x = 0, -1, -2, \cdots$.

Bland gammafunktionens många egenskaper återfinns:

(1) $\Gamma(x) > 0$, $x > 0$,
(2) $\Gamma(1) = 1$,
(3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

De första två följer direkt från Eulers integralformel och den tredje kan bevisas med hjälp av partiell integration.

Om vi definierar $0! = 1$ har $n!$ samtliga av dessa egenskaper, dvs. $\Gamma(x)$ generaliserar egenskaper hos $n!$ från positiva heltal till reella tal. Detta är ej fallet för $F(x)$ då

$$F(x+1) = xF(x) + \frac{1}{\Gamma(1-x)}$$

(där $1/\Gamma(1-x) = 0$ om och endast om $x = n = 1, 2, \cdots$).

Betrakta nu funktionen

$$G(x) = \big(1 + \sin^2(2\pi x)\big)\Gamma(x).$$

Eftersom $\sin(2\pi x)$ är periodisk med period 1 och $\sin^2(2\pi x) \geq 0$ med likhet då $x = 0$ har även $G(x)$ ovanstående egenskaper. För att entydigt karakterisera $\Gamma(x)$ behövs alltså ytterligare egenskaper men vilka? 1922 visade Bohr och Mollerup att det räcker att kräva logaritmisk konvexitet, dvs. att $\log \Gamma(x)$ är en konvex funktion:

Gammafunktionen är den enda funktionen, definierad för $x > 0$, som har egenskaperna 1–3 samt är logaritmiskt konvex.

Email address: hallnas@chalmers.se

Matematiska Vetenskaper, Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet, 412 96 Göteborg