

MVE235 Matematisk orientering

Matematisk optimering— Introduktion och verksamhet vid MV

Ann-Brith Strömberg

biträdande professor i matematisk optimering

<http://www.chalmers.se/sv/personal/Sidor/ann-brith-stromberg.aspx>

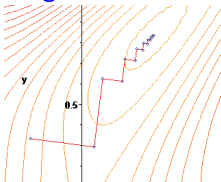
Forskargruppen i Matematisk Optimering

<http://www.chalmers.se/en/departments/math/research/research-groups/optimization/Pages/default.aspx>

2020-11-23

Några nedslag i historien

- C.F. Gauss (1777–1855): *Första optimeringsalgoritmen*
“brantaste lutning”

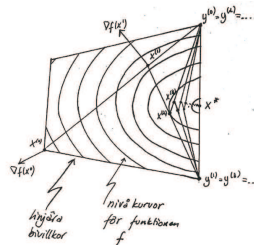


- W.R. Hamilton (1857): *“icosian game”*: *finn en Hamiltoncykel*
 $\Rightarrow$ *Handelsresandeproblemet*



- G.B. Dantzig (1947): *Linjärprogrammering: simplexalgoritmen*
Program $\Leftrightarrow$ militära tränings- och logistikscheman

- Marguerite Frank & Philip Wolfe (1956):
En iterativ metod för lösning av olinjära optimeringsproblem



Optimering: "Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?
 - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } j \text{ besöks } \textit{direkt} \text{ efter kund } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$
 - $y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } i \text{ besöks av fordon } k \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$
- **Möjligt** — Vad begränsar?
 - Varje kund ska besökas exakt en gång
 - Tidsfönster, transportbehov, lastkapacitet, hämta hos en kund lämna hos en annan, ...
- **Bra** — Vad är ett relevant mål för optimeringen?
 - Minimera totala sträckan / restider / utsläpp / väntetider / ...

Det klassiska handelsresandeproblemet

- Varianter av ruttplaneringsproblem: skolskjuts, hybridfordon, självkörande taxibilar, ...

Exempel på tillämpningsområden

- **Logistik: produktion och transport**

- Optimera rutter för godstransporter, snöröjning, skolbussar, ...
- Planera skogsavverkning och -transporter
- Produktionsplanering, schemaläggning
- Minimera cykeltid i robotstationer (exv bilindustri)
- Planera underhåll av maskiner, fordon, infrastruktur, ...

- **Energi**

- Integrera variabel elproduktion (sol och vind) i elsystemet
- Lokalisering av kraftverk och infrastruktur

- **Finans**

- Portföljoptimering; riskhantering; investeringsplanering

- **Medicin**

- Beräkna strålriktningar och -intensiteter vid cancerbehandling
- Rekonstruera bilder från röntgenmätningar

Linjär optimering—ett exempel

- En chokladfabrik ska tillverka två produkter – “*vita moln*” och “*mörka drömmar*” – under nästkommande vecka
- Introduktionserbjudande för *vita moln*: vinsten per såld bit av *vita moln* är hälften av den för *mörka drömmar*
- Endast en av produkterna kan tillverkas vid samma tillfälle och de två produkterna har samma produktionstakt (# tillverkade bitar/tidsenhet)
- Marknadsavdelningen: maximalt 75% av veckans tillgängliga produktionstimmar får användas till *mörka drömmar*
- Inköpsavdelningen: maximalt 10 ton glukos finns att tillgå
- En veckas produktion av *mörka drömmar* kräver 8 ton glukos
- En veckas produktion av *vita moln* kräver 13 ton glukos
- Hur ska produktionen planeras för att vinsten ska bli så stor som möjligt?

Hur många av veckans 50 produktionstimmar ska användas för tillverkning av *mörka drömmar* respektive *vita moln*?

“Gör något så bra som möjligt”

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?

x_1 = antal timmar som används för att tillverka *mörka drömmar*

x_2 = antal timmar som används för att tillverka *vita moln*

- **Möjligt** — Vad begränsar?

- Endast en produkt vid samma tillfälle. Totalt 50 timmar.

$$x_1 + x_2 \leq 50$$

- Maximalt 75% av tillgänglig tid till *mörka drömmar*

$$x_1 \leq 50 \cdot 0.75 = 37.5$$

- Maximalt 10 ton glukos

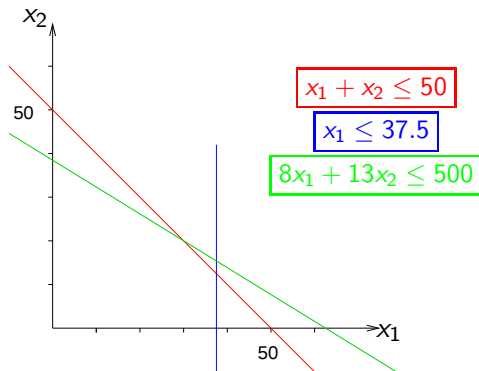
$$8 \cdot \frac{x_1}{50} + 13 \cdot \frac{x_2}{50} \leq 10 \quad \Longleftrightarrow \quad 8x_1 + 13x_2 \leq 500$$

- **Bra** — Vad är målet för optimeringen?

- Maximera vinsten

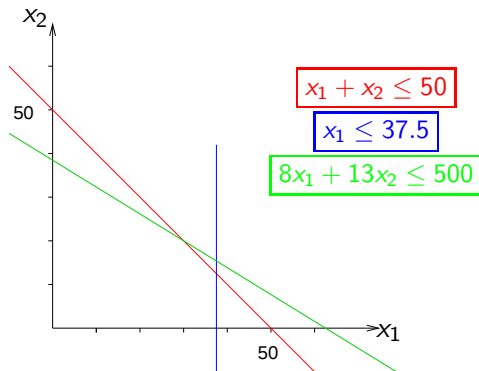
$$2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Grafisk lösning



- Bivillkor: linjära olikheter

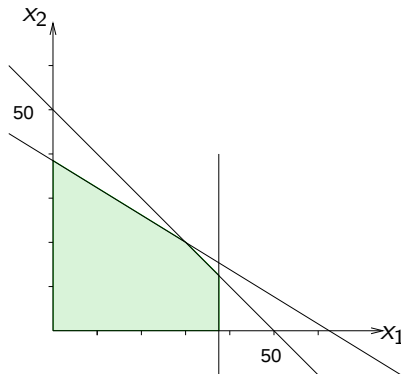
Grafisk lösning



- Bivillkor: linjära olikheter
- Antalet timmar får inte vara negativt

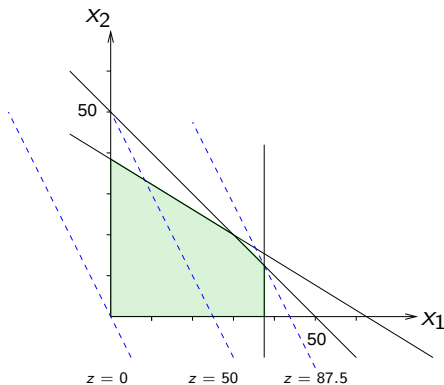
Grafisk lösning

Tillåten mängd



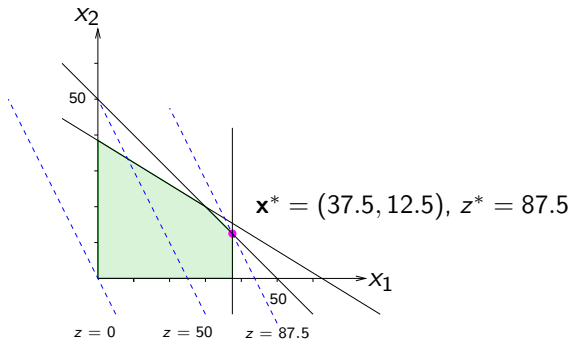
- Bivillkor: linjära olikheter
- Antalet timmar får inte vara negativt: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Grafisk lösning



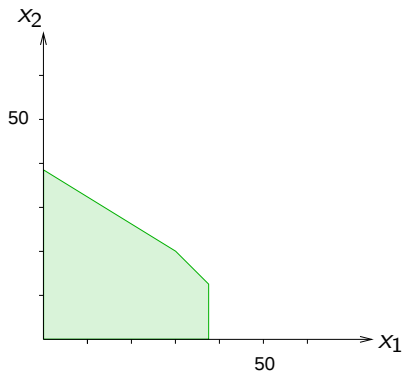
- Bivillkor: linjära olikheter
- Antalet timmar får inte vara negativt: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- Maximera målfunktionen: $z = 2x_1 + x_2$

Grafisk lösning



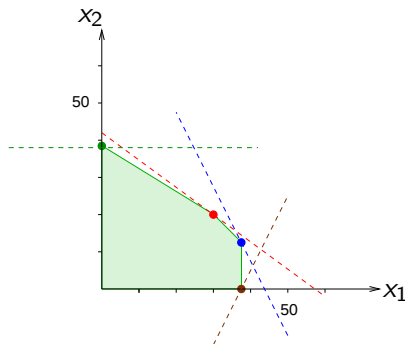
- Bivillkor: linjära olikheter
- Antalet timmar får inte vara negativt: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- Maximera målfunktionen: $z = 2x_1 + x_2$
- *Mörka drömmar*: 37.5 timmar. *Vita moln*: 12.5 timmar.

Lösningssmetod?



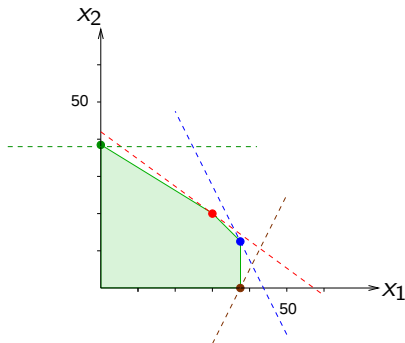
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...

Lösningssmetod?



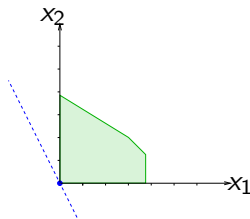
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt

Lösningssmetod?



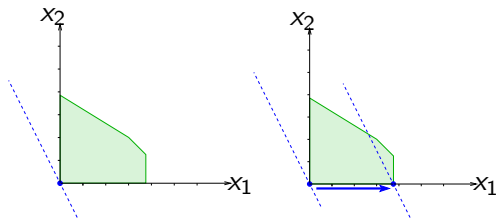
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: leta bland extrempunkterna

Lösningssmetod?



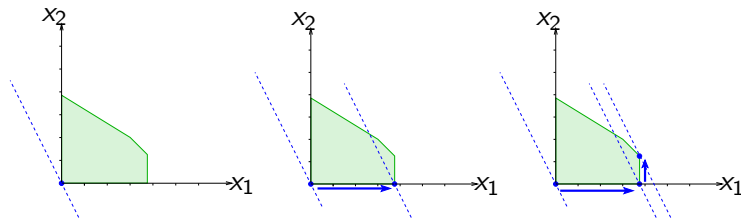
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: leta bland extrempunkterna
- Simplexmetoden (G.B. Dantzig, 1947)

Lösningssmetod?



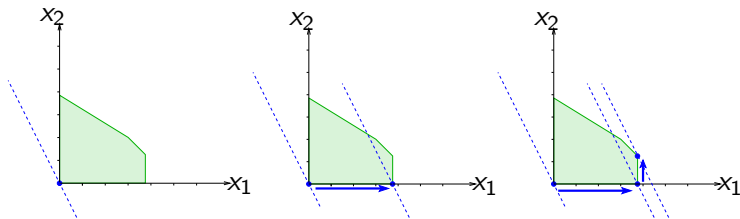
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: leta bland extrempunkterna
- Simplexmetoden (G.B. Dantzig, 1947)
 - Vandra mellan "närliggande" extrempunkter

Lösningssmetod?



- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: leta bland extrempunkterna
- Simplexmetoden (G.B. Dantzig, 1947)
 - Vandra mellan “närliggande” extrempunkter
 - Marginalförbättring: Varje “ny” extrempunkt har ett bättre målfunktionsvärde än den “förra”

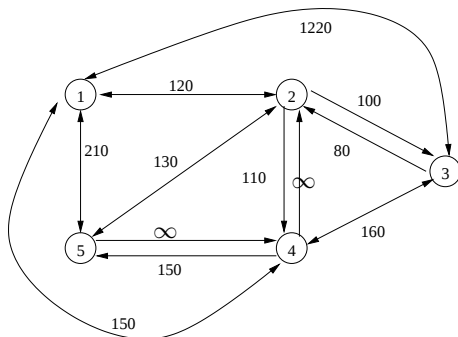
Lösningssmetod?



- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: leta bland extrempunkterna
- Simplexmetoden (G.B. Dantzig, 1947)
 - Vandra mellan “närliggande” extrempunkter
 - Marginalförbättring: Varje “ny” extrempunkt har ett bättre målfunktionsvärde än den “förra”
 - Stannar i extrempunkten med bästa möjliga målfunktionsvärde

Handelsresandeproblemet (travelling salesperson problem, TSP)

- n städer och förbindelser mellan alla städer (avstånd på varje förbindelse)
- Finn den kortaste tur som passerar alla städer



- Våldigt lätt att beskriva och förstå men väldigt svårt att lösa (kombinatorisk explosion)

Utveckling av TSP-lösningar

- Optimala lösningar som beräknats för TSP av olika storlekar

år	n
1954	49
1962	33
1977	120
1987	532
1987	666
1987	2392
1994	7397
1998	13509
2001	15112
2004	24978



Världsrekord i TSP-lösning (2004)

- Ett TSP med 24 978 städer/orter/byar i Sverige
- Optimal tur: $\approx 72\,500$ km (855597 TSP LIB units)
- Turen med längd 855 597 hittades i mars 2003 (Lin–Kernighans TSP-heuristik)
- Bevisades i maj 2004 att ingen kortare tur existerar
- De slutliga stegen som förbättrade den undre gränsen från 855 595 upp till 855 597 krävde ≈ 8 års beräkningstid (parallella beräkningar på ett nätverk av Linux-arbetsstationer)

“Without knowledge of the 855 597 tour we would not have made the decision to carry out this final computation”

- <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/>

Kurser i optimering vid MV

Grundkurser (ges på engelska)

- MVE165 Linjär och heltalsoptimering med tillämpningar, LP4, år 2
<https://chalmers.instructure.com/courses/9446>
- TMA947 Olinjär optimering, LP1, år 3
<https://chalmers.instructure.com/courses/10393>

Fortsättningskurs (MSc)

- TMA521 Large-scale optimization, LP2
<https://chalmers.instructure.com/courses/10868>

Några masterexamensarbeten inom optimering

www.chalmers.se/en/departments/math/research/research-groups/optimization/Pages/master-thesis-projects.aspx

Volvo Group Trucks Technology:

- Vehicle routing problems with many available vehicle types
- Optimization of routes for a fleet of plug-in hybrid vehicles

Volvo Car Corporation, Göteborg:

- Dispatching fleets of shared autonomous vehicles

Ericsson AB:

- Models and methods for deploying functions on a many-core grid

Department of Mathematical Sciences:

- Application of logic-based Benders decomposition to battery dimensioning for the routing of hybrid vehicles

Consid AB & Department of Architecture and Civil Engineering:

- Minimizing space heating and cost when retrofitting building blocks

Aviolinx, Stockholm:

- Tail assignment for single and mixed aircraft fleets

Statistics Sweden (SCB), Örebro:

- Approaches to cell suppression in statistical tables

Några forskningssamarbeten/doktorandprojekt inom optimering

Fraunhofer-Chalmers Research Centre for Industrial Mathematics:

- Kopplade kombinatoriska och geometriska optimeringsproblem inom fordonsproduktionsindustrin

research.chalmers.se/en/project/8334

Department of Space, Earth and Environment, Chalmers:

- Matematisk modellering av storskalig integration av variabel elproduktion

research.chalmers.se/en/project/6559

Saab AB, Linköping:

- Effektbaserad underhållsplanering och support för flygsystem

research.chalmers.se/en/project/8332

Några forskningssamarbeten/doktorandprojekt inom optimering

GKN Aerospace Sweden, Trollhättan:

- Taktisk resursallokering för effektivt kapacitetsutnyttjande
research.chalmers.se/en/project/8333
- Produktionsplanering genom optimal schemaläggning av en multi-taskproduktionscell
research.chalmers.se/en/project/6813

Volvo Group Trucks Technology & Department of Mechanics and Maritime Sciences, Chalmers:

- Bränslebesparing med hjälp av däcksennergiförlustoptimering
research.chalmers.se/en/project/6001

Department of Electrical Engineering, Chalmers:

- Matematiska optimeringsmodeller och metoder för integrerad produktion och tillståndsbaserat underhåll inom vindkraft
research.chalmers.se/en/project/5889

Frågor?