Intromatte för Tekniskt basår

Matematiska Vetenskaper

18 augusti 2019

© 2019 Matematiska Vetenskaper

Innehåll

1 Aritmetik och algebra **1**

1.1 Räkning med naturliga tal och heltal 1
1.2 Rationella tal och bråkräkning 6
1.3 Potenser med heltalsexponent 10
1.4 Kvadratrötter 12

2 Ekvationer **15**

2.1 Förstagradsekvationer 16
2.2 Andragradsekvationer 17

Facit **21**

Sakregister **22**

1 Aritmetik och algebra

I detta kapitel skall vi först arbeta med grundläggande aritmetik, alltså de fyra räknesätten, för olika typer av tal. I den senare delen av kapitlet behandlas hantering av algebraiska uttryck.

Vi rekommenderar att du inte använder räknare eller formelsamling då du löser uppgifterna. De kunskaper du får genom att dels räkna själv och tänka på vilka räkneregler du använder, och dels lära dig en del fakta istället för att förlita dig på formelsamlingen, är oerhört värdefulla för dina fortsatta studier. I många matematikintensiva utbildningar förväntas du klara dig utan både formelsamling och räknare.

1.1 Räkning med naturliga tal och heltal

De *naturliga talen* är talen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. (De tre avslutande punkterna i listan indikerar att mönstret fortsätter utan slut.)

De *negativa heltalen* är $-1, -2, -3, -4, \ldots$. Ibland skriver man negativa tal med en parentes: $(-1), (-2), (-3), (-4), \ldots$.

De naturliga talen och de negativa talen bildar tillsammans *heltalen*

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Ett viktigt ord i det matematiska språket är begreppet *mängd*. I normalsvenska betyder ordet *ett stort antal* eller *en mätbar ansamling*. I matematik är en mängd en samling objekt, *element*. Så har t.ex. *mängden av de naturliga talen* varje naturligt tal som element. Talet 13 är ett element i mängden, liksom varje annat naturligt tal. Mängden av alla naturliga tal betecknas ofta $\mathbb{N}$. Med symboler skriver vi att 13 är ett naturligt tal som $13 \in \mathbb{N}$. Det faktum att -1 inte är ett naturligt tal skrivs $-1 \notin \mathbb{N}$.

På samma sätt talar man om mängden av alla heltal $\mathbb{Z}$, mängden av alla negativa heltal $\mathbb{Z}_-$ och mängden av alla positiva heltal $\mathbb{Z}_+$. Talet 0 är varken positivt eller negativt.

Om varje element i en mängd A också är element i en annan mängd B så säger vi att A är en *delmängd* till B vilket skrivs $A \subset B$. Vi har t.ex. att $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, eftersom varje naturligt tal även är ett heltal.

1.1.1 Naturliga tal

Två naturliga tal kan *adderas*, vilket av alla uppfattas som närmast självklart. Det faktum att termerna kan byta plats med varandra utan att resultatet ändras, dvs. att operationen addition är *kommutativ*, ($a+b=b+a$ för alla naturliga tal a och b), är också något så självklart att man sällan eller aldrig reflekterar över det. Operationen är bara definierad för par av tal. Vid addition av fler än två tal måste man därför i princip markera den ordning additionerna skall utföras i med parenteser, så

$$3+(6+13)=3+19=22 \text{ och } (3+6)+13=9+13=22.$$

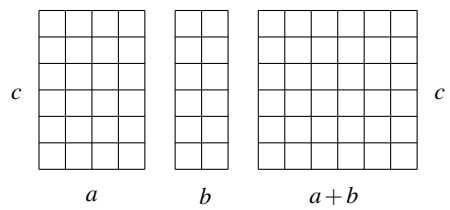
Vi vet dock att det, precis som i exemplet ovan, inte spelar någon roll hur vi sätter parenteserna. Summan av talen 3, 6 och 13 är 22 i vilken ordning vi än räknar. Allmänt gäller att $a+(b+c)=(a+b)+c$ för alla naturliga tal a, b och c, och vi säger att additionen är *associativ*. Om inga parenteser skrivits ut gäller *läsriktningsprioritet*, dvs. additionerna utförs från vänster till höger. Uttrycket $3+6+13+5$ tolkas alltså som $((3+6)+13)+5$.

Talen som adderas kallas *termer* och resultatet av additionen kallas *summa*.

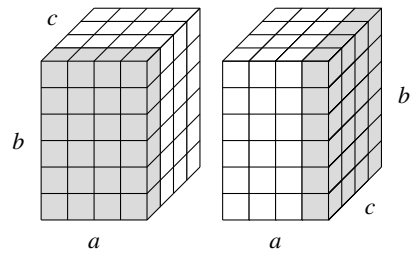
Multiplikation av naturliga tal är upprepad addition, så t.ex.

$$6 \cdot 7 = 7+7+7+7+7+7 = 42.$$

Även multiplikation är som bekant kommutativ, dvs. $a \cdot b = b \cdot a$ för alla naturliga tal a och b. Detta är dock inte lika uppenbart[1] som för addition. Ett sätt att se det på är att föreställa sig en inrutad rektangel med a rutor i ena riktningen och b rutor i den andra. Det totala antalet rutor t är oberoende av ordningen i vilken man räknar dem, och man för att $t = a \cdot b$, alternativt $t = b \cdot a$, beroende på vilken sida man utgår ifrån. Multiplikationen är också associativ, dvs. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, för alla naturliga tal a, b och c. Ett rätblock med sidorna a, b och c kan användas för att inse detta. Talen som multipliceras kallas *faktorer* och resultatet av multiplikationen kallas *produkt*.



Figur 1: $ca+cb=c(a+b)$



Figur 2: $(ab)c=a(bc)$

[1] Att 5 påsar med 3 kolor i varje och 3 påsar med 5 kolor i varje är lika mycket härligt godis är inte uppenbart för ett litet barn.

Sammantaget behöver man varken bry sig om ordning eller parenteser när man bara har en av operationerna addition eller multiplikation. Då både addition och multiplikation är inblandade, som i beräkningen av $3+4\cdot 7$, kommer prioritetsregeln *multiplikation före addition* in, så att $3+4\cdot 7 = 3+28 = 31$. Här gäller alltså inte läsriktningsprioritet. Vill vi att additionen skall utföras först måste vi markera det med parenteser: $(3+4)\cdot 7 = 7\cdot 7 = 49$. Denna uträkning kan också göras med *distribution* som $(3+4)\cdot 7 = 3\cdot 7+4\cdot 7 = 21+28 = 49$. Allmänt gäller vid addition följt av multiplikation den *distributiva lagen*:

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c,$$

för alla naturliga tal a, b och c. Detta övertygar man sig om genom att ta två rektanglar som består av $a\cdot c$ respektive $b\cdot c$ rutor och lägga dem bredvid varandra.

Om $a, b \in \mathbb{N}$ så säger vi att a är *större än* b, vi skriver $a > b$, om det finns $c \in \mathbb{N},\ c \neq 0$, sådant att $a = b+c$. Vi säger att b är *mindre än* a och skriver $b < a$, om $a > b$. Detta stämmer överens med den intuitiva uppfattningen om jämförelse mellan tal ("a är större än b om a är lika med b plus lite till"). Vi säger att a är *större än eller lika med* b, $a \geq b$, om $a > b$ eller $a = b$, dvs. om det finns $c \in \mathbb{N}$ sådant att $a = b+c$. (Notera att $a \geq a$, medan $a \not> a$, dvs. a är större än eller lika med a, men a är inte större än a.) För $a \geq b$ definierar vi *subtraktion* av a med b, $a-b=c$, där c är samma som ovan, dvs.

$$a-b=c, \quad \text{om} \quad a=b+c.$$

I fallet $a < b$ finns inget $c \in \mathbb{N}$ sådant att $a = b+c$. Subtraktion i det fallet kräver att man lämnar de naturliga talen. Frågan diskuteras i nästa avsnitt.

Division är i någon mening den motsatta operationen till multiplikation, dvs. eftersom $6\cdot 7 = 42$ så är $42/7 = 6$. I det här avsnittet handlar det endast om division av naturliga tal. Multiplikation av naturliga tal är som vi nämnde tidigare samma som upprepad addition och division är därför upprepad subtraktion. Vi får alltså $42/7 = 6$ eftersom $42-7-7-7-7-7-7 = 0$. (De gamla mekaniska räknemaskinerna byggde helt på denna princip.) Förutom vanligt bråkstreck använder vi i texten ibland $\div$ som divisionstecken[2]. Antalet gånger man kan utföra subtraktionen kallas *kvot*. Om man så småningom, som i exemplet ovan, kommer till 0, säger man att divisionen går jämnt ut. Om divisionen inte går jämnt ut får man en *rest*, dvs. ett tal som inte är 0, men som är för litet för att man ska kunna subtrahera vidare. T.ex. får vi

$$45-7-7-7-7-7-7 = 3,$$

dvs. $45/7 = 6+3/7$.

[2]Det finns många tecken som används för att beteckna division, $\div$, : , /, eller ett vanligt bråkstreck.

Vid division av 45 med 7 får man alltså kvoten 6 och resten 3.

Att man vid division av n med m får kvot q och rest r, är samma sak som att n kan skrivas som $n = mq+r$, där resten r är ett naturligt tal mindre än m, dvs. $0 \leq r < m$. I exemplet ovan har vi att $45 = 7\cdot 6+3$.

Det är värdefullt att kunna utföra så kallad *lång division* av naturliga tal för hand, inte minst för att underlätta polynomdivision längre fram. Algoritmen man använder är alltid densamma, men uppställningen kan variera, t.ex. "liggande stolen" eller "trappan". Vilken man väljer är helt oviktigt. Här nedan används "liggande stolen". Schematiskt ser den ut så här:

Kvot	
Täljare	Nämnare

Exempel. Vi önskar beräkna $8476 \div 23$.

För att det skall vara enklare att följa kalkylerna redovisas varje steg i en ny "stol". En förklaring ges efter exemplet.

			368 ⟵ kvot
		360	8476 | 23
	300	8476 | 23	– 6900
8476 | 23	8476 | 23	– 6900	1576
	– 6900	1576	– 1380
	1576	– 1380	196
		196	– 184
			12 ⟵ rest

Vi ser här att $8476 \div 23 = 368$ med rest 12, dvs. $8476 \div 23 = 368 + 12 \div 23$, eller, som vi är mer vana vid att skriva,

$$\frac{8476}{23} = 368 + \frac{12}{23}.$$

Vi kan också skriva om resultatet utan något divisionstecken som $8476 = 23\cdot 368 + 12$.

□

Om du tycker att algoritmen är svårbegriplig eller krånglig kan du kanske ha hjälp av följande förklaring:

Det är väldigt opraktiskt att subtrahera talet 23 från talet 8476 mer än 300 gånger. Därför effektiviserar man genom att först räkna ut hur många hundra gånger 23 går i 8476. Eftersom $84 \div 23 = 3$ med rest 15 går 23 minst 300 gånger i 8476, men inte 400 gånger. Vi kan därmed skriva hundratalet 300 i kvoten och subtrahera $300 \cdot 23$ från 8476.

Vi har att $84 - 3 \cdot 23 = 15$ och $8476 - 300 \cdot 23 = 1500 + 76 = 1576$.

I tredje stolen får vi $157 \div 23 = 6$ med rest 19. Alltså går 23 minst 60 gånger i 1576, men inte 70 gånger. Vi får $157 - 6 \cdot 23 = 19$ och $1576 - 60 \cdot 23 = 190 + 6 = 196$. Vi kan nu lägga till 60 i kvoten.

Slutligen får vi $196 \div 23 = 8$ med rest 12. Alltså är $196 = 8 \cdot 23 + 12$ och kvotens entalssiffra är 8. Kalkylerna ovan kan sammanföras som

$$\begin{aligned} 8476 &= 300 \cdot 23 + 1576 = 300 \cdot 23 + 60 \cdot 23 + 196 = 360 \cdot 23 + 196 \\ &= 360 \cdot 23 + 8 \cdot 23 + 12 = 368 \cdot 23 + 12. \end{aligned}$$

Alltså $8476 \div 23 = 368$ med rest 12, vilket är samma sak som att $8476/23 = 368 + 12/23$.

Fallet då divisionen $a \div b$ går jämnt ut, alltså fallet $r = 0$, är speciellt intressant. I detta fall är $a = b \cdot c$ där c också är ett naturligt tal. Talet a är alltså produkten av de två faktorerna b och c. Det finns många synonymer för detta. Om divisionen $a \div b$ går jämnt ut så säger man att

- a är *delbart med* b, eller
- a *delas av* b, eller
- b *delar* a, eller
- b är *divisor till* a, eller
- b är *delare till* a, eller
- b är en *faktor i* a, eller
- a är en *multipel av* b.

T.ex. har vi att $8464 \div 23 = 368$ med rest 0. Detta innebär att $8464 \div 23 = 368$ så med andra ord är 8464 *delbart med* 23 och 23 en *faktor i* 8464.

Eftersom $a = 1 \cdot a$, så har a alltid delarna a och 1 (1 är med andra ord delare till alla tal). Om b är delare till a där $b \neq 1$ och $b \neq a$ så kallas b *äkta delare* till a.

> Tal som är större än 1 och som saknar äkta delare kallas *primtal*. Tal som har äkta delare kallas *sammansatta tal*. Talet 1 är en enhet och kallas varken primtal eller sammansatt tal.

Alla tal som är delbara med två kallas *jämna*, övriga naturliga tal kallas *udda*. Att ett tal n är jämnt betyder att det ger rest 0 vid division med 2, dvs. $n = 2k$ för något naturligt tal k. Att n är udda betyder att det ger rest 1 vid division med 2 (den enda möjliga resten förutom 0), dvs. $n = 2k + 1$ för något naturligt tal k.

De fem minsta primtalen är 2, 3, 5, 7 och 11. Alla jämna tal större än 2 har ju 2 som en äkta delare, så primtal större än 2 måste därför vara udda tal.

Talet 15 kan skrivas som produkt av primtalen 3 och 5, $15 = 3 \cdot 5$, och 15 har alltså 3 och 5 som äkta delare. I denna produkt kan faktorernas ordning varieras, dvs. $15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$. Bortsett från det är faktoruppdelningen unik. För att övertyga oss om detta i det konkreta fallet kan vi resonera som följer: Om $15 = a \cdot b$, där a och b är naturliga tal större än 1, så är både a och b mindre än 15. Nu kan vi antingen testa alla möjliga produkter av tal mellan 1 och 15, eller också reducera antalet försök genom att inse att $4 \cdot 4 > 15$ och att minst ett av talen a och b därför måste vara mindre än 4. Vi ser då lätt att enda möjligheten att skriva 15 som produkt av primtal, om vi bortser från ordningen, är $15 = 3 \cdot 5$.

Resonemanget ovan om möjliga faktorer gäller generellt: Om talet c inte är ett primtal så har c en primtalsfaktor p, $1 < p \leq \sqrt{c}$. Det är alltså relativt enkelt att avgöra om ett visst tal är ett primtal under förutsättning att talet inte är särskilt stort. Tag som exempel talet 97. Om 97 inte är ett primtal så har det en primtalsfaktor p som uppfyller

$$p \leq \sqrt{97} < \sqrt{100} = 10.$$

Det räcker då att konstatera att 97 inte finns i någon av ”multiplikationstabellerna” för primtal mindre än 10 för att dra slutsatsen att 97 är ett primtal.

För stora tal är det däremot tidsödande att avgöra om talet är ett primtal eller ej på detta sätt, till och med om det är ett datorprogram som genomför undersökningen. Det finns dock mer sofistikerade och snabbare sätt att undersöka riktigt stora tal om man har tillgång till en dator.

Det faktum att 15 bara kunde faktoriseras i primtalsfaktorer på ett enda sätt gäller generellt. Redan under antiken bevisade Euklides i Elementa (bok 9) följande centrala sats om uppdelning i primtalsfaktorer.

> *Aritmetikens fundamentalsats*: Varje naturligt tal som är större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal. Bortsett från ordningsföljden är primtalsfaktorerna entydigt bestämda. (Här utvidgar vi begreppet produkt något och kallar även ett ensamt primtal för en produkt av primtal.)

Som exempel på hur man kommer fram till en primtalsfaktorisering ska vi skriva talet 8464 som en produkt av primtalsfaktorer. Vi vet redan att $8464 = 23 \cdot 368$, men här agerar vi som om vi inte visste det. Talet är jämnt, så vi kan skriva $8464 = 2 \cdot 4232$. Nu ska 4232 faktoriseras; det är också ett jämnt tal. Vi fort sätter bryta ut tvåor så länge det går och får $8464 = 2 \cdot 4232 = 2 \cdot 2 \cdot 2116 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1058 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 529$. Talet 529 är udda, så vi får nu leta efter primtalsfaktorer större än två. Undesökning visar att 529 inte är delbart med vare sig $3, 5, 7, 11, 13, 17$ eller 19, men väl med 23, $529 = 23 \cdot 23$, och vi får slutligen

$$8464 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 23 = 2^4 \cdot 23^2,$$

en produkt av primtal. (Här använder vi potenser med heltalsexponenter som ett kort skriv sätt för upprepad multiplikation av ett tal med sig självt, $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$. Potensräkning diskuteras ingående senare i kursen.)

Ett bevis för att varje tal kan skrivas som en produkt av primtal bygger på att ett tal som inte är ett primtal kan skrivas som produkt av två mindre tal. Antingen är dessa primtal, eller så kan de skrivas som produkt av ännu mindre tal, vilka i sin tur antingen är primtal eller kan skrivas som produkt av ännu mindre tal o.s.v.. Processen är ändlig, eftersom mängden av naturliga tal, skilda från noll, har ett minsta element, nämligen 1. Vi avstår här från att visa att faktorerna är entydigt bestämda, vilket är betydligt knivigare.

En annan av Euklides viktiga satser är:

> Det finns oändligt många primtal.

Bevis. Antag motsatsen, dvs. antag att det bara finns ändligt många primtal,

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Bilda produkten M av alla dessa och lägg till 1. Enligt aritmetikens fundamentalsats måste då $M + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ vara en produkt av primtal, men det är inte möjligt eftersom talet ger rest 1 vid division med vilket primtal p_k som helst. Motsägelsen visar att vårt antagande om att primtalen är ändligt många är felaktigt, alltså finns det oändligt många primtal. □

En lista över alla primtal skulle alltså bli oändligt lång, men man kan naturligtvis ge en ändlig lista över alla primtal upp till ett visst tal. Denna lista kan sedan användas vid primtalsfaktorisering av större tal. Vill man på ett systematiskt sätt plocka fram alla primtal upp till ett givet tal kan man använda *Erathostenes primtalssåll* från ca 230 före vår tid. Detta beskrivs i många läroböcker och kan säkert hittas på Internet. Idén är att utgå från alla naturliga tal från 2 till och med den önskade övre gränsen. Successivt stryker man alla äkta multipler av primtalen med början från 2, sedan 3, 5 o.s.v.. Det minsta överhoppade talet som är större än de hittills funna primtalen måste vara nästa primtal i listan. Då man strukit multiplerna av 2, 3 och 5 är minsta överhoppade talet 7, därefter 11 o.s.v..

1.1.2 Negativa tal

De naturliga talen och additionen av sådana är direkt sammankopplade med antalsräkning och därmed något som även mycket små barn förstår. Eftersom de övriga räknesätten för naturliga tal bygger på addition, så finns det en lättbegriplig tolkning också för dessa. Namnet "naturliga" speglar just det sätt på vilket vi uppfattar talen i $\mathbb{N}$ och deras egenskaper. Då det gäller negativa heltal är situationen lite annorlunda, även om också dessa har naturliga tolkningar. Vi är sedan barnsben vana vid minusgrader på vintern och vet att om det är fem grader varmt ($+5°$) och temperaturen sjunker tio grader, så blir det fem grader kallt ($-5°$). Ett annat begrepp som ofta dyker upp i vardagslivet är "skuld", om man är skyldig någon 100 kronor behöver man en hundralapp för att nollställa sin ekonomi. Medan begreppet naturliga tal är ett av de begrepp som ligger i grunden för all matematik och som inte definieras, måste man definiera de negativa heltalen med hjälp av de naturliga talen. De naturliga talen och de negativa heltalen bildar tillsammans mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$. Man definierar sedan de fyra räknesätten inom den nya talmängden och visar att de har samma egenskaper som räknesätten för naturliga tal (med den väsentliga skillnaden att det i $\mathbb{Z}$ gör att subtrahera vilket tal som helst från vilket tal som helst utan att lämna mängden). Vi kommer här dock att nöja oss med den intuitiva uppfattningen om negativa tal illustrerad ovan och repetera hur man räknar med negativa tal utan att ge formella definitioner och bevis.

Vi utgår alltså från att vi, givet det naturliga talet n, har en uppfattning om vad $(-n)$ är, samt att vi vet hur man adderar och subtraherar i $\mathbb{N}$.

Om $a, b \in \mathbb{N}$, så gäller

- $-(-a) = a$
- $(-a) + b = b - a$ för $b \geq a$
- $(-a) + b = -(a - b)$ för $b < a$
- $(-a) + b = b + (-a)$
- $(-a) + (-b) = -(a + b)$
- $(-a) - b = (-a) + (-b)$
- $a - (-b) = a + b$
- $(-a) - (-b) = (-a) + b$

Exempel.

$$\begin{aligned} 3 + (-7) &= -(7-3) = -4 \\ (-3) + 7 &= 7 - 3 = 4 \\ (-3) + (-7) &= -(7+3) = -10. \end{aligned}$$

□

Multiplikation definieras som följer

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b &= b \cdot (-a) = -(a \cdot b), \\ (-a) \cdot (-b) &= a \cdot b, \end{aligned}$$

för alla naturliga tal a och b. Den andra likheten ovan är den kända regeln "minus minus är plus". Detta är en definition och alltså inget som kan härledas. Dock är det så att det inte är slumpen som avgör hur man väljer att definiera en operation. Multiplikation av heltal definieras på ett sätt som garanterar att räknereglerna för naturliga tal fortsätter gälla i $\mathbb{Z}$. Man kan ändå ge en intuitiv förklaring: om man tolkar minustecknet som byte av sida med avseende på 0 på tallinjen, så måste två successiva byten innebära att man hamnar på samma sida nollan som man utgick från. Likaså, om man säljer en skuldsedel resulterar det i att man får intäkter.

Exempel.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-7) &= -(4 \cdot 7) = -28 \\ (-4) \cdot (-7) &= 4 \cdot 7 = 28. \end{aligned}$$

□

För att illustrera hur man går tillväga när man bevisar att de önskade räknereglerna fortfarande gäller visar vi att en trippel av negativa tal uppfyller den distributiva lagen. Vi har nämligen för alla naturliga tal a, b och c att

$$(-a) \cdot ((-b) + (-c)) = (-a) \cdot (-(b+c)) = a \cdot (b+c),$$

och

$$(-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot (-c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b+c),$$

där vi i sista likheten utnyttjar den distributiva lagen för naturliga tal. Därmed har vi visat

$$(-a) \cdot ((-b) + (-c)) = (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot (-c),$$

som är den distributiva lagen för en trippel negativa tal.

Delbarhet fungerar på samma sätt i $\mathbb{Z}$ som i $\mathbb{N}$. Tal som är delbara med 2 kallas jämna och har formen $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$, tal som inte är delbara med 2 kallas udda och kan skrivas som $n = 2k \pm 1,\ k \in \mathbb{Z}$ (± 1 betyder att man kan välja mellan $+1$ och -1).

Olikheten $a > b$ för $a, b \in \mathbb{Z}$ definieras på samma sätt som för naturliga a, b, dvs. $a > b$ om det finns ett positivt tal c sådant att $a = b + c$. övriga olikheter definieras analogt.

1.1.3 Räkneregler

I början av kapitlet diskuterades räknereglerna för naturliga tal. Vi utvidgade sedan talområdet till att även omfatta negativa tal. Utvidgningen gjordes på ett sådant sätt att såväl priorits- som räknereglerna fortsatte att gälla. Nedan sammanfattas de prioritetsregler och räkneregler som behandlats i kapitlet. Observera att om a är ett heltal så kan talet $(-a)$ vara negativt (om a är positivt) eller positivt (om a är negativt).

Prioriteringsordning

1. Operation inom parenteser
2. Multiplikation och division
3. Addition och subtraktion
4. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

Räkneregler för heltal

För alla heltal a, b och c gäller det att

- $a+b=b+a$ *kommutativitet*
- $a+(b+c)=(a+b)+c$ *associativitet*
- $a+0=a$ *identitet*
- $a\cdot b=b\cdot a$ *kommutativitet*
- $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ *associativitet*
- $a\cdot 1=a$ *identitet*
- $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ *distributivitet*
- $a+(-a)=0$
- $a+(-b)=a-b$
- $-(-a)=a$ *minus minus är plus*
- $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$
- $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$ *minus minus är plus*
- $a-(b-c)=a-b+c$ *minus minus är plus*
- $a-(b+c)=a-b-c$

Övningar

1.1.1 Bestäm kvot och rest vid divisionerna nedan. Ange svaret på formen $n=m\cdot q+r$.

a. $7956\div 21$
b. $7497\div 21$
c. Är något av talen 7956 eller 7497 delbart med 21?

1.1.2 Skriv talen nedan som produkt av primtal.

a. 495 b. 47502
c. 249

1.1.3 Beräkna

a. $7-(-2)\cdot(3-9)\cdot((2+(-5)-8)\cdot(-3-(-5))-4)$
b. $(-4-2)\cdot((-6-(-9))-((6-(-7)+3)\cdot((-2)-3)+(-1)\cdot(7-(-4))))$

1.1.4 Skriv om följande uttryck utan parenteser.

a. $a-(-b)\cdot(a+1)-b\cdot(-a+1)$
b. $((-a)\cdot(-b)+a\cdot(b-2\cdot(-a)))\cdot(-1+b)$

1.1.5 Ordna talen i listorna nedan i stigande ordning.

a. $5, 11, -2, 4$
b. $-a, b, -c, d$, där $a=19, b=-20, c=-18, d=-100$

1.2 Rationella tal och bråkräkning

När man inför de negativa talen så får uttrycket $a-b$ med $a<b$ mening som ett (negativt) tal. På samma sätt ger man genom att införa *rationella tal* eller *bråktal* mening åt $a\div b$ som ett tal även då resten inte är 0. Både de rationella talen och de fyra räknesätten för dessa definieras på ett sätt som garanterar att räknereglerna som listats tidigare fortfarande gäller.

1.2.1 De rationella talen

Rationella tal eller *bråktal* skrivs p/q, där p och q är heltal och $q\neq 0$. Mängden av alla rationella tal betecknas med $\mathbb{Q}$. Utan att ge en formell definition kan vi säga att p/q är det tal som multiplicerat med q ger p. Därmed kan ett heltal p identifieras med det rationella talet $p/1$. Det betyder att alla heltal kan uppfattas som rationella tal. Mängden

av alla heltal, $\mathbb{Z}$, är alltså en delmängd till mängden av alla rationella tal, dvs. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Talet 0 kan skrivas som $0/q$ för godtycklig nämnare $q \neq 0$. Allmänt gäller att $p/q = 0$ om och endast om $p = 0$. Observera att villkoret $q \neq 0$ fortfarande måste vara uppfyllt!

Ett rationellt tal kan alltid skrivas på (oändligt) många olika sätt, för om $s \neq 0$ är ett heltal så är

$$\frac{p}{q} = \frac{s \cdot p}{s \cdot q}.$$

För att övertyga sig om det ska man inse att om man multiplicerar talet till vänster med högerledets nämnare, så får man precis högerledets täljare:

$$s \cdot q \cdot \frac{p}{q} = s\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = s \cdot p.$$

(Här har vi använt den associativa lagen för en produkt av två heltal och ett rationellt tal.) Man säger att bråktalet p/q *förlängts* med (faktorn) $s \neq 0$ till $(s \cdot p)/(s \cdot q)$, eller att $(s \cdot p)/(s \cdot q)$ *förkortats* med s till p/q. Till exempel är $7/11$ och $14/22$ lika eftersom

$$\frac{7}{11} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 11} = \frac{14}{22}.$$

I allmänhet försöker man ange bråktal på enklaste formen så att täljaren p och nämnaren q inte har någon gemensam faktor utom ± 1 (sådana tal p och q kallas *relativt prima*). Man säger då att talet är skrivet på *enklaste bråkform*. Ett systematiskt sätt att hitta den enklaste bråkformen är att primtalsfaktorisera täljare och nämnare och förkorta med alla gemensamma primtalsfaktorer. Vi har t.ex. att

$$\frac{84}{30} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 7}{5} = \frac{14}{5}.$$

Man kan förlänga/förkorta med negativa faktorer också och speciellt kan man alltid se till att nämnaren är positiv:

$$\frac{-7}{-11} = \frac{(-1) \cdot 7}{(-1) \cdot 11} = \frac{7}{11} \quad \text{och} \quad \frac{7}{-11} = \frac{(-1) \cdot 7}{(-1) \cdot (-11)} = \frac{-7}{11}.$$

1.2.2 Räkning med rationella tal

Addition (och subtraktion) av bråktal med samma nämnare ges av addition (respektive subtraktion) av täljarna med samma nämnare:

$$\frac{11}{13} + \frac{5}{13} = \frac{11+5}{13} = \frac{16}{13} \quad \text{och} \quad \frac{11}{13} - \frac{5}{13} = \frac{11-5}{13} = \frac{6}{13}.$$

I allmänhet måste termerna skrivas om så att de får samma nämnare innan man kan addera eller subtrahera bråken. *Korsvis förlängning* av de två nämnarna fungerar alltid:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{d \cdot a + b \cdot c}{d \cdot b}.$$

Det är dock en god vana att inte förlänga med mer än nödvändigt, eftersom det är jobbigare att räkna med stora tal och risken att räkna fel ökar. Då man arbetar med rationella funktioner, se avsnitt **??**, blir detta extra viktigt. För att förlänga med så lite som möjligt letar man upp den den *minsta gemensamma nämnaren*, dvs. den minsta gemensamma multipeln av nämnarna. Ett systematiskt sätt att göra detta är att primtalsfaktorisera nämnarna och leta upp den minsta produkt av primtal som innehåller alla faktorer för nämnarna. Om vi t.ex. vill räkna ut

$$\frac{7}{12} + \frac{37}{30},$$

där båda talen är på enklaste bråkform, så använder vi att $12 = 2^2 \cdot 3$ och $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. De primtal som ingår är alltså 2 (med potensen 2), 3 och 5. Den minsta möjliga gemensamma nämnaren är alltså $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. För att få denna nämnare så får vi förlänga med 5 respektive 2:

$$\frac{7}{12} + \frac{37}{30} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 12} + \frac{2 \cdot 37}{2 \cdot 30} = \frac{35}{60} + \frac{74}{60} = \frac{109}{60}.$$

Om man slaviskt följer den allmänna principen med korsvis multiplikation får man istället

$$\frac{7}{12} + \frac{37}{30} = \frac{30 \cdot 7}{30 \cdot 12} + \frac{12 \cdot 37}{12 \cdot 30} = \frac{210}{360} + \frac{444}{360} = \frac{654}{360} = \frac{109}{60},$$

vilket ger jobbigare räkningar.

Oavsett hur man väljer att utföra beräkningarna ska man i svaret alltid ange resultatets enklaste bråkform.

Subtraktion av bråktal görs på motsvarande sätt som addition:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a - b \cdot c}{d \cdot b},$$

Här, som för addition, bör man hitta den minsta gemensamma nämnaren

$$\frac{7}{12} - \frac{39}{15} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 12} - \frac{4 \cdot 39}{4 \cdot 15} = \frac{35}{60} - \frac{156}{60} = \frac{35 - 156}{60} = \frac{-121}{60} = -\frac{121}{60}.$$

Här hade vi $12 = 2^2 \cdot 3$ och $15 = 3 \cdot 5$, och minsta gemensamma nämnaren var alltså åter $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Multiplikation av rationella tal ska definieras så att räknelagarna för heltalsmultiplikation fortfarande gäller. Det betyder att multiplikation med heltal skall motsvara upprepad addition. Alltså gäller exempelvis att

$$n \cdot \frac{c}{d} = \underbrace{\frac{c}{d} + \frac{c}{d} + \cdots + \frac{c}{d}}_{n \text{ termer}} = \frac{n \cdot c}{d}.$$

Vidare skall multiplikation vara associativ. Alltså gäller

$$\frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{c}{d} = \frac{n}{n} \cdot \frac{c}{d} = \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{c}{d} = n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{d}\right).$$

Detta är möjligt endast om

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{n \cdot d}.$$

Sammantaget ger detta

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = a \cdot \frac{c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Vi fick alltså att den enda rimliga definitionen för multiplikation av rationella tal är

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Division av rationella tal ges av

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Detta motiveras av att kvoten

$$\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d}$$

måste vara ett tal A sådant att

$$A \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

och vi ser att $A = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$ är det tal som uppfyller kravet, eftersom

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}.$$

Bråket q/p kallas ibland för det inverterade bråket till p/q (här förutsätts att $p, q \neq 0$). Vi skulle då kunna säga att man dividerar ett bråk med ett annat genom att multiplicera det första med det inverterade till det andra.

Vid närmare eftertanke är detta intuitivt självklart. Om man har en tolvbitarstårta och alla ska få en bit var så räcker den till tolv personer, men om man bara ger en halv bit till var och en så kan dubbelt så många få, alltså

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot 2 = 24.$$

I kapitel 1.1.1 då vi räknade med enbart heltal skulle vi sagt att $13 \div 4$ ger kvoten 3 och resten 1, medan vi nu kallar $\frac{13}{4}$ kvot. Då handlade det om heltalsdivision som speglar t.ex. en fördelning: *om tretton ägg skall fördelas på kartonger som rymmer fyra ägg vardera så får man tre fulla kartonger och ett ägg över.* I detta kapitel handlar det om division för rationella tal. Alla rationella tal kan divideras, kvoten är alltid ett rationellt tal.

Ibland kan användningen av bråkstreck som divisionssymbol bli anledning till felläsning/feltolkning:

Vi har att

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \cdot c}$$

men

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}$$

Därför är det viktigt att veta vad som avses då man använder ”dubbelbråk”. Att uttrycken ovan inte är samma sak, syns lätt i tryckt text, men inte lika lätt i handskriven text. Speciellt viktigt är det att skriva likhetstecknet på rätt nivå.

Tänk också på att ett dubbelbråk ofta innehåller ”osynliga parenteser”, vilket illustreras i nästa exempel.

Exempel. Vi skall skriva $\dfrac{\frac{1}{7} - \frac{3}{11}}{\frac{2}{63} + \frac{11}{18}}$ som ett bråktal på enklaste bråkform.

Vi subtraherar i täljare och och adderar i nämnare och utför sedan divisionen vilket ger

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{7}-\frac{3}{11}}{\frac{2}{63}+\frac{11}{18}} &= \left(\frac{1}{7}-\frac{3}{11}\right)\div\left(\frac{2}{63}+\frac{11}{18}\right)\\
&= \left(\frac{1\cdot 11}{7\cdot 11}-\frac{3\cdot 7}{11\cdot 7}\right)\div\left(\frac{2\cdot 2}{7\cdot 9\cdot 2}+\frac{11\cdot 7}{2\cdot 9\cdot 7}\right)\\
&= \left(\frac{11-21}{11\cdot 7}\right)\div\left(\frac{4+77}{2\cdot 9\cdot 7}\right)=\frac{-10\cdot 2\cdot 9\cdot 7}{11\cdot 7\cdot 81}=-\frac{20}{99},
\end{aligned}$$

efter förenkling. □

Man ska inte vara för snabb med att multiplicera ihop faktorerna i nämnaren. Om man behåller faktoriseringen ända till sista steget är det mycket lättare att se vad man eventuellt kan förkorta med för att få svaret på enklaste bråkform.

1.2.3 Räkneregler

De prioritets- och räkneregler som gällde för heltalen gäller även för rationella tal. Här sammanfattas de räkneregler som tillkommer för de rationella talen. Observera att nämnaren $d\cdot b$ kan vara onödigt stor och att man alltid bör hitta den minsta gemensamma nämnaren istället.

> För alla rationella tal, a/b och c/d, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att
>
> - $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{d\cdot a}{d\cdot b}+\dfrac{b\cdot c}{b\cdot d}=\dfrac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}$
> - $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b}$
> - $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$
> - $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$

Sist i avsnittet ska vi titta närmare på likhet och olikheter mellan rationella tal.

Likheten $a/b=c/d$ äger rum om och endast om (dvs. precis när)

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}=1$$

alltså om och endast om $ad=bc$. Både uttrycket *om och endast om* och uttrycket *precis när* betyder att påståendena före och efter är ekvivalenta. Att två påståenden är ekvivalenta betyder att antingen så är båda påståenden sanna, eller så är båda påståendena falska. För ekvivalenta påståenden kan det alltså inte vara så att ena påståendet är sant medan det andra är falskt. Ekvivalens mellan påståenden skrivs ofta med en dubbelpil, $\Leftrightarrow$. Notera att det måste stå påståenden på båda sidor, ekvivalenspilen kan inte användas som likhetstecken.

Olikheter och räkneregler för olikheter diskuteras något i avsnittet om reella tal och mer ingående i kursens andra del. Här går vi händelserna i förväg för att komma till insikt om hur man jämför positiva rationella tal.

Antag att a,b,c,d är positiva heltal. Det är rimligt att ha samma definition för olikhet som tidigare, dvs. vi utgår från att

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\ \text{ om och endast om }\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0.$$

Nu kan vi skriva de två bråktalen på gemensam nämnare, subtrahera, och får

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{ad-bc}{bd}>0.$$

"Minus minus är plus"-regeln säger att detta inträffar om och endast om täljaren och nämnaren har samma tecken. Eftersom $b,d>0$, har vi att $bd>0$ och får slutligen

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0 \quad\Leftrightarrow\quad ad-bc>0 \quad\Leftrightarrow\quad ad>bc.$$

Vi sammanfattar

> För alla rationella tal, a/b och c/d, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att
>
> $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad\text{om och endast om}\quad ad=bc$$
>
> Om dessutom $a,\ b,\ c$ och d är positiva heltal, gäller det att
>
> $$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\quad\text{om och endast om}\quad ad>bc$$

Vi avslutar med att konstatera en av de rationella talens viktigaste egenskaper som skiljer dem från heltalen: givet två olika rationella tal finns alltid ett tredje rationellt tal mellan dem, dvs. om $r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ r_1 < r_2$, så finns $r \in \mathbb{Q}$ sådant att $r_1 < r < r_2$. Även om det låter abstrakt är det i själva verket oerhört lätt att visa, välj helt enkelt

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

(talet mittemellan de två givna). Man kanske har svårt att omedelbart inse konsekvenserna av detta faktum. En konsekvens är att det, givet ett rationellt tal, inte finns ett "nästa" rationellt tal. En annan är att man kan tala om gränsvärden av rationella talföljder på ett meningsfullt sätt.

Övningar

1.2.1 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a. $\frac{5040}{40320}$ b. $\frac{6182}{-616}$
c. $\frac{(-42)\cdot 308\cdot 230}{(-60)\cdot 121\cdot(-69)}$ d. $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$
e. $3+\frac{1}{4}+\frac{17}{6}+\frac{35}{8}$ f. $\frac{49}{17}-\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-3$

1.2.2 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a. $\frac{1}{4}-\left(\frac{4}{3}-\frac{13}{6}\right)$
b. $\frac{9}{4}-\frac{16}{5}-\left(\frac{11}{21}-\frac{26}{7}+4\right)+\left(\frac{16}{5}-\frac{22}{15}\right)$

1.2.3 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a. $\frac{1}{7}\div\frac{4}{7}$ b. $\frac{6}{11}\cdot\frac{11}{24}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{38}{17}$
c. $\frac{13}{6}\cdot\frac{15}{4}\div\frac{55}{12}$ d. $-\frac{34}{3}\cdot\frac{12}{5}\div\left(-\frac{17}{15}\right)$
e. $\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{20}\right)\div\left(\frac{9}{100}\cdot\frac{5}{19}\right)$ f. $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{20}\div\frac{9}{100}\cdot\frac{5}{19}$
g. $\left(\frac{77}{8}\div\frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{24}{13}\div\frac{6}{11}\right)$ h. $\frac{77}{8}\div\frac{4}{3}\div\frac{24}{13}\div\frac{6}{11}$

1.2.4 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform.

a. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)$ b. $\frac{\frac{23}{6}-\frac{23}{8}}{\frac{49}{11}-\frac{19}{6}}$
c. $\frac{\frac{13}{4}-\frac{31}{12}}{\frac{6}{5}-\frac{2}{7}}-\frac{\frac{13}{11}-\frac{8}{9}}{\frac{23}{99}}\cdot\frac{46}{41}$

1.2.5 Skriv talen a, b, c, d i avtagande ordning.

a. $a = 2/3,\ b = 5/6,\ c = 7/8,\ d = 4/5$
b. $a = -1/5,\ b = -2/11,\ c = -3/14,\ d = -5/19$

1.3 Potenser med heltalsexponent

1.3.1 Potenser

I detta avsnitt introduceras begreppet potens för rationella tal, och därmed naturligtvis för alla heltal. Exponenten är här heltal men längre fram (i avsnitt **??**) kommer exponenten att vara ett rationellt tal och slutligen ett reellt tal. De räknelagar som presenteras i avsnittet är allmängiltiga, de gäller även med reella exponenter.

1.3.2 Potens med heltalsexponent

Potenser med heltalsexponenter definieras av

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1, \text{ för } a \neq 0,\\
a^1 &= a,\\
a^2 &= a\cdot a,\\
a^3 &= a\cdot a^2 = a\cdot a\cdot a,\\
a^n &= a\cdot a^{n-1} = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n \text{ faktorer}}, \text{ då } n \text{ är ett positivt heltal},\\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ då } n \text{ är ett positivt heltal och } a \neq 0.
\end{aligned}$$

I definitionen ovan kan n bara vara ett heltal medan a kan vara såväl ett heltal som ett rationellt tal.

Vid beräkning av potenser av negativa tal måste man vara extra uppmärksam. De beräknas naturligtvis på samma sätt som potenser av positiva tal, så t.ex.

$$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81.$$

Man måste skriva parentes runt talet, eftersom $-3^4 = -81 \neq (-3)^4 = 81$.

Eftersom $(-1)^2 = 1$, så gäller att: $(-a)^1 = -a$, $(-a)^2 = a^2$, $(-a)^3 = -a^3 = -(a^3)$ och allmänt

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{om } n \text{ är ett jämnt heltal}\\ -a^n & \text{om } n \text{ är ett udda heltal.}\end{cases}$$

Definitionen av multiplikation för rationella tal:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p \cdot p}{q \cdot q} = \frac{p^2}{q^2}$$

ger för potenser av rationella tal att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}.$$

I detta fall är det nödvändigt att använda förtydligande parenteser, eftersom man annars för

$$\frac{p^n}{q} \left(\neq \frac{p^n}{q^n}\right).$$

1.3.3 Räkneregler

Vi sammanfattar här de regler som gäller vid räkning med potenser. De kan härledas om man skriver ut vad de olika potenserna är. Exempelvis är

$$(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}.$$

> För a, $b \neq 0$ och m, n heltal gäller det att
>
> - $a^0 = 1$
> - $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
> - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
> - $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
> - $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
> - $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
> - $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Vid räkning med potenser gäller prioritetsregeln att *potenser beräknas före multiplikation och division* och även före addition eller subtraktion, så t.ex.

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18 \text{ och } 2 + 3^2 = 2 + 9 = 11.$$

Som tidigare skall operation inom parenteser beräknas först så t.ex.

$$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 \text{ och } (2+3)^2 = 5^2 = 25.$$

Vid upprepad potensberäkning, som i 2^{3^3}, gäller att exponenten beräknas först så vi får

$$2^{3^3} = 2^{(3^3)} = 2^{27} = 134217728 \text{ och } 2^{5+3} = 2^{(5+3)} = 2^8 = 256.$$

Också här ger parenteser förtur så $(2^3)^3 = 8^3 = 512$

En liten varning! Det finns ingen standardprioritet för upprepad potensberäkning på räknare. Vissa kalkylatorer har ”exponenten först” prioritet, andra har läsriktningsprioritet. Uttrycket 2^{3^3} kan bli antingen 134217728 eller 512 beroende på räknarfabrikatet och ibland till och med på modellen. Använd alltid parenteser för säkerhets skull.

Här sammanfattar vi de prioritetsregler som behandlats hittills.

> *Prioriteringsordning*
>
> 1. Operation inom parenteser
> 2. Exponent
> 3. Potens
> 4. Multiplikation och division
> 5. Addition och subtraktion
> 6. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

Övningar

1.3.1 Beräkna

a. 5^2	b. 2^5	c. $(-3)^4$	d. $(-4)^3$
e. 1^{100}	f. 100^1	g. 3^0	h. $(-3)^0$

1.3.2 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a. 2^{-2}	b. $(-3)^{-3}$	c. 1^{-5}

1.3.3 Skriv som potenser av 2

a. $1/64$	b. $16^3/2^{10}$	c. $128^3/32^5$

1.3.4 Skriv följande som ett tal på enklaste bråkform, utan potenser.

a. $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-7} \cdot 105 \cdot (-7)^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 5}$ b. $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^{-1} \div \left(\frac{3}{10}\right)^{-3}}{56 \cdot 10^{-6}}$

1.4 Kvadratrötter

Vi har redan tidigare haft anledning att definiera och kommentera kvadratrötter. Här gör vi det något mer systematiskt. Vi återkommer till ämnet i kapitlet om funktioner.

1.4.1 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom produkten av såväl två positiva tal, som två negativa tal, är positiv så gäller det att

$$x^2 = x \cdot x \geq 0 \text{ för alla reella tal } x.$$

Alltså har ekvationen $x^2 = b$ ingen reell lösning om $b < 0$. I avsnitt **??** behandlades svårigheterna med att avgöra huruvida en viss ekvation har lösningar i det talsystem man arbetar med. Där påpekades att ekvationen $x^2 = b$ alltid har en (dvs. minst en) reell lösning om $b > 0$. I själva verket har den alltid två, t.ex. har ekvationen $x^2 = 9$ lösningarna 3 och -3.

Med *kvadratroten* ur b, $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b.

Notera att $\sqrt{b} \geq 0$. Alltså är $\sqrt{9} = 3$ och inte -3 eller ± 3. Det gäller också att $\sqrt{0} = 0$. Enligt definitionen har vi alltså att $(\sqrt{b})^2 = b$. Men det gäller också att

$$\left(-\sqrt{b}\right)^2 = \left(-\sqrt{b}\right) \cdot \left(-\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b.$$

Alltså gäller det att:

Ekvationen $x^2 = b$ har för $b > 0$ två olika *reella lösningar* (ibland även kallade *rötter*):

$$\sqrt{b} \text{ och } -\sqrt{b}$$

Man skriver ibland $x^2 = b \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm\sqrt{b}$, för $b \geq 0$. Med detta menas alltså att ekvationen har lösningarna $x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = -\sqrt{b}$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 9$ har således lösningarna (rötterna) $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, dvs. $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$. □

Exempel. Ekvationen $x^2 = 20$ har lösningarna (rötterna) $x_{1,2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$, eftersom direkt kontroll ger att $(2\sqrt{5})^2 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 4(\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$. □

1.4.2 Räkneregler

Av definitionen av kvadratrot får vi följande räkneregler:

- $(\sqrt{a})^2 = a$ för $a \geq 0$.
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, dvs.

$$\sqrt{a^2} = a \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2} = -a \text{ om } a < 0.$$

- $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$ och alla a, dvs.

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2 \cdot b} = -a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a < 0.$$

- $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, om $a > 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, $a \neq b$, $a, b > 0$.

Den första punkten följer direkt av definitionen av kvadratrot eftersom $\sqrt{a}$ är det icke-negativa tal vars kvadrat är a.

Punkt två kan bevisas genom att vi konstaterar att $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ och att

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b.$$

Alltså är $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ enligt definitionen av kvadratrot.

På liknande sätt bevisas regeln för roten ur en kvot och de två efterföljande reglerna.

Den femte regeln följer av

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Metoden som används i sista punkten kallas *förlängning med konjugatuttryck*. Uttrycken $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ och $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ kallas konjugerade, eller varandras *konjugat*. Om man multiplicerar de med varandra så får man (se avsnitt **??** för den s.k. konjugatregeln)

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{b} - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$$

De två sista reglerna kan nu visas genom att man förlänger med konjugatet, så t.ex. för den första likheten har vi

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \text{ för } a \neq b,\ a, b > 0.$$

Anmärkning. I allmänhet, alltså för de flesta tal a och b, är

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Till exempel ger $a = b = 1$ att $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$, medan $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2$. På samma sätt är i allmänhet

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

Vi visar nu ett antal exempel på hur man kan använda räknereglerna.

Exempel. Ekvationen $4x^2 - 3 = 0$ får vi till $x^2 = 3/4$ genom att addera 3 till båda leden och sedan dividera dem med 4. Den har därmed lösningarna

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

Exempel. Den tredje punkten implicerar att

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 = |-3|.$$

□

Exempel. Den fjärde punkten handlar om att bryta ut ur eller multiplicera in faktorer i rotuttryck och vi har exempelvis att

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

och

$$-2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = -\left(2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3}{2}} = -\sqrt{6}.$$

□

Exempel. Den fjärde punkten ger ibland möjlighet till förenkling om man har flera rötter sådana att talen under rottecknen har gemensamma faktorer. Här kommer ett exempel

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+4\sqrt{3}=10\sqrt{3}.$$

□

Exempel. Den näst sista punkten ger exempelvis att

$$\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}\ (\approx 0,4).$$

□

Exempel. Förlängning med konjugat (sista punkten) ger att man kan skriva om uttryck som

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}}$$

på följande sätt

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}}=\frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})}=\frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2}=\frac{5-\sqrt{6}}{25-6}=\frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

så att man får heltalsnämnare. □

Exempel. Vi kan jämföra storleksordningen mellan tal som innehåller kvadratrötter utan att använda räknare. Låt oss jämföra talen $\sqrt{2}+1$ och $\sqrt{5}$. Eftersom vi inte vet vilket av dem som är störst, skriver vi frågetecken mellan dem. Vi använder räknereglerna för olikheter. Både vänster- och högerledet är positiva, alltså får vi samma olikhetstecken efter kvadrering

$$\sqrt{2}+1\ ?\ \sqrt{5}\quad\Leftrightarrow\quad(\sqrt{2}+1)^2\ ?\ (\sqrt{5})^2\quad\Leftrightarrow\quad 2+2\sqrt{2}+1\ ?\ 5\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{2}\ ?\ 1.$$

Eftersom $\sqrt{2}>1$, gäller $\sqrt{2}+1>\sqrt{5}$. □

Exempel. Här visar vi att

$$\frac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}>1.$$

Enligt räknereglerna för olikheter kan vi förlänga med 3 och istället visa att

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}>3\cdot 1=3,$$

eftersom $3>0$. Vänsterledet kan nu skrivas om

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Vi använder återigen räknereglerna för olikheter: $\sqrt{3}+\sqrt{2}>3 \Leftrightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2>9 \Leftrightarrow 3+2\sqrt{6}+2>9 \Leftrightarrow \sqrt{6}>2 \Leftrightarrow 6>4$, vilket är uppenbart, alltså är det sant att

$$\frac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}>1.$$

□

Övningar

1.4.1 Förenkla

a. $\sqrt{0,49}$ b. $\sqrt{90000}$
c. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{75}$ d. $\sqrt{10}/\sqrt{125}$
e. $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ f. $\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{64}$.

1.4.2 Lös ekvationen

a. $x^2-25=0$ b. $5-x^2=0$ c. $9x^2-4=0$
d. $16-6x^2=0$ e. $x^2=0$

1.4.3 Skriv med heltalsnämnare

a. $2/\sqrt{6}$ b. $3/\sqrt{21}$ c. $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
d. $2/(\sqrt{11}-3)$ e. $1/(2-\sqrt{5})$ f. $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

2 Ekvationer

Vi börjar med att diskutera vad en ekvation är och vad det är för generella regler som gäller vid ekvationslösning. Vi tittar också på hur ekvationer kan dyka upp på ett naturligt sätt vid problemlösning. Lösningsmetoder för några typer av ekvationer kommer i de följande avsnitten.

En ekvation är helt enkelt en likhet som (i regel) innehåller en eller eventuellt flera obekanta variabler. Vi tar några enkla exempel.

Exempel. Likheten $21 - x = x - 3$ är en ekvation med en obekant x. Om det är en enda obekant i ekvationen så brukar man ofta av tradition använda bokstaven x, men det går lika bra med vilken bokstav (symbol) som helst. Likheten $g^2 - g = 1$ är en ekvation med en obekant som heter g.

Likheten $3x + 2y = 31$ är en ekvation som innehåller två obekanta x och y.

Likheten $8 = 5 + 3$ är en ekvation som inte innehåller några obekanta utan enbart tre mycket bekanta heltal. □

Det är inte ovanligt att begreppen ekvation, formel och funktion blandas ihop. En ekvation beskriver ett samband. Detta samband kan vara uppfyllt för alla tillåtna variabelvärden, i så fall talar man om en *identitet*. I annat fall är man ofta intresserad av de specifika variabelvärden för vilka sambandet uppfylls, dvs. man är intresserad av att *lösa ekvationen*. En formel är ett uttryck som oftast innehåller symboler (variabler) och i vilket man kan sätta in olika variabelvärden. Funktionsbegreppet diskuteras ingående senare i kursen. Här kan vi nöja oss med att säga att en funktion kan ges av en formel, men behöver inte göra det, och att en ekvation ofta har formen $f = g$, där f och g är funktioner.

> Nedan listar vi några ord som på ett naturligt sätt hör samman med begreppen ekvation, formel och funktion:
>
> - *ekvation* – sätta in, obekant, lösa, lösa ut, lösning, lösningsmängd, rot, falsk rot, ekvivalenta
> - *formel* – variabel, sätta in
> - *funktion* – sätta in, variabel, värde, funktionsvärde, beräkna, nollställe, graf.

Givet en ekvation med en obekant x säger vi att talet a är *en lösning* till ekvationen om ekvationen omvandlas till en sann likhet mellan tal då vi sätter in $x = a$. Att *lösa* en ekvation innebär att bestämma dess lösningsmängd, dvs. hitta alla dess lösningar, eller motivera att lösning saknas om så skulle vara fallet. Ofta är man intresserad av alla lösningar inom en viss talmängd, t.ex. alla reella lösningar, alla positiva lösningar, alla heltalslösningar etc. Om inget annat sägs letar vi efter reella lösningar.

Exempel. Talet 12 är lösning till ekvationen $21 - x = x - 3$, eftersom $21 - 12 = 12 - 3 = 9$.

Talet 2 är lösning till ekvationen $2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 12 = 0$, därför att $2 \cdot 2^4 - 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 12 = 32 - 8 - 8 - 4 - 12 = 0$. Genom att konstatera detta har vi dock inte löst ekvationen, eftersom den har fler lösningar. Vi har inte ens löst ekvationen i $\mathbb{R}$ då det finns en reell lösning till, nämligen $-3/2$. Däremot är 2 den enda lösningen i $\mathbb{Z}$.

Talet $a\pi$ är en lösning till ekvationen $\sin x = 0$ om och endast om (precis när) $a \in \mathbb{Z}$.

Ekvationen $x^2 + 2 = 0$ saknar reella lösningar, eftersom $x^2 \geq 0$ för alla reella x.

Ekvationen $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ är en identitet, dvs. dess lösningsmängd är hela $\mathbb{R}$. □

När man inte har metoder för att lösa en ekvation får man nöja sig med att visa att det finns (alternativt inte finns) lösningar, att det finns ett visst antal lösningar, att de har vissa egenskaper etc. Ibland visar sig detta vara tillräckligt, t.ex. kan det räcka med att veta att en ekvation har en enda lösning och att denna är positiv, utan att man är så intresserad av exakt vad lösningen är. En sak som man ofta gör är att lokalisera lösningarna, dvs. bestämma relativt små intervall som innehåller varsin lösning. Vid behov kan man sedan använda numeriska metoder för att få närmevärden.

Givet en ekvation med två obekanta x, y säger vi att talparet (a, b) är *en lösning* till ekvationen om ekvationen omvandlas till en sann likhet mellan tal då vi sätter in $x = a,\ y = b$. Att *lösa* en ekvation innebär återigen att hitta alla lösningar, eller motivera att lösning saknas om så skulle vara fallet.

Exempel. Talparet $(1, 14)$ är en lösning till ekvationen $3x + 2y = 31$, eftersom $3 \cdot 1 + 2 \cdot 14 = 3 + 28 = 31$. Ekvationen har oändligt många lösningar, talparet (x, y), där

$$x = a, \quad y = \frac{31 - 3a}{2}$$

är en lösning för alla reella a. Om vi låter x stå kvar som variabelnamn och skriver

$$y = \frac{31 - 3x}{2},$$

säger man att man *löst ut y i termer av x*, eller med hjälp av x. □

Två ekvationer kallas *ekvivalenta* om de har exakt samma lösningsmängd.

Exempel. Ekvationerna $x-1=0$ och $(x-1)^2=0$ är ekvivalenta, eftersom båda har en enda lösning, $x=1$. □

Exempel. Ekvationerna $x^2=-1$ och $\sin x=2$ är ekvivalenta i $\mathbb{R}$, eftersom båda saknar reella lösningar. □

Exempel. Ekvationerna $x(x-1)=x$ och $x-1=1$ är inte ekvivalenta. Den andra har som enda lösning $x=2$, medan den första har lösningarna $x_1=0,\ x_2=2$. □

Exempel. Ekvationerna $x-1=1$ och $(x-1)^2=1$ är inte ekvivalenta. Den första har lösningsmängden $\{2\}$, medan den andra har lösningsmängden $x_1=0,\ x_2=2$. □

I ett av exemplen visade det sig att man tappar en rot vid förkortning med x. Det sista exemplet visar att en ekvation som fås ur en annan medelst kvadrering inte nödvändigtvis är ekvivalent med den givna. I den kvadrerade ekvationen dök en s.k. *falsk rot* upp. Det är mycket viktigt att känna till vilka operationer man får utföra över en ekvation så att dess lösningsmängd bevaras, och minst lika viktigt att veta vilka operationer som kan leda till förlust av lösningar, alternativt uppkomst av falska lösningar.

> Operationer som alltid leder till en ekvation ekvivalent med den givna är:
>
> - addering av samma tal/uttryck till båda sidor av likheten;
> - multiplikation/division av båda leden med ett tal/uttryck skilt från 0;
> - förenkling av de två sidorna av likheten var för sig.
>
> Vanliga operationer som kan leda till förlust av lösningar, alternativt uppkomst av falska lösningar, är:
>
> - förlängning/förkortning med uttryck som skulle kunna vara lika med 0;
> - kvadrering av båda leden.

Ett sätt att gardera sig mot falska lösningar är att sätta in de kandidater till lösningar man fått i den ursprungliga ekvationen och helt enkelt kontrollera att den verkligen omvandlas till en sann likhet. Det är svårare att gardera sig mot förlust av lösningar. Vi återkommer till ämnet i senare avsnitt.

Vad ska man då ha ekvationer till? En ekvation använder man alltså till att beskriva ett samband. Ofta innehåller den någonting som är obekant och i många fall är målet just att bestämma vad denna obekanta storlek är. I andra fall beskriver ekvationen något objekt, så t.ex. är $y=2x+3$ ekvationen för en rät linje, dvs. punkterna med koordinater lösningarna (x,y) till denna utgör en linje. Vi tar en titt på några exempel på problem som kan lösa med hjälp av ekvationer

Exempel. Kal har en storasyster som heter Ada. Skillnaden på dem i ålder är lika många år som Kal fyllde för 3 år sedan. Ada är 21 år gammal. Hur gammal är Kal?

Vi betecknar Kals nuvarande ålder med x. Skillnaden mellan deras ålder är då $21-x$ och för 3 år sedan fyllde Kal $x-3$. En ekvation som beskriver sambandet är alltså $21-x=x-3$. □

Exempel. Vi söker nu ett tal med den "magiska" egenskapen att om man ifrån kvadraten av talet subtraherar talet själv så får man exakt 1. Vilket är talet?

Vi betecknar det okända talet med g. Subtrahera talet själv ifrån kvadraten av talet är g^2-g och detta skulle bli 1. Alltså får vi ekvationen $g^2-g=1$. □

Exempel. Beda är i godisaffären för att köpa lördagsgodis. Hon köper 3 likadana chokladkakor och 2 likadana tablettaskar. Hon betalar 31 kronor. Hur mycket kostar chokladkakorna respektive tablettaskarna per styck?

Vi betecknar priset på chokladkakan med x och priset på en tablettask med y. Det totala priset på Bedas lördagsgodis blir då $3x+2y$. Hon betalade 31 kronor så vi får alltså ekvationen $3x+2y=31$. □

2.1 Förstagradsekvationer

Vi ska nu titta på hur man löser så kallade *linjära ekvationer*.

Man säger att en ekvation är *linjär* om de obekanta endast förekommer som förstagradstermer, dvs. om det enda man gjort med de obekanta är att man multiplicerat dem med tal och sedan adderat eller subtraherat de olika termerna med varandra och med tal. Linjära ekvationer kallas också för *förstagradsekvationer*.

Exempel. Ekvationen $21 - x = x - 3$ är linjär för den enda obekanta variabeln x har bara adderats och subtraherats med tal. Samma sak gäller för $3x + 2y = 31$ där de två obekanta bara multiplicerats med tal.

Däremot är ekvationen $g^2 - g = 1$ inte linjär då den obekanta variabeln g här har multiplicerats med sig själv. Inte heller ekvationen $xy = 1$ är linjär då man här multiplicerat de två obekanta med varandra. □

Linjära ekvationer är det enklaste som finns att lösa. Vi börjar med att titta på linjära ekvationer med en obekant som vi (av tradition) kallar x. Strategin är enkel: samla alla termer som innehåller x på en sida och alla tal på den andra.

Exempel. Vi löser ekvationen $21 - x = x - 3$:

$$21 - x = x - 3 \Leftrightarrow (21 - x) + x = (x - 3) + x \Leftrightarrow 21 = 2x - 3 \Leftrightarrow$$

$$21 + 3 = (2x - 3) + 3 \Leftrightarrow 24 = 2x \Leftrightarrow \frac{24}{2} = \frac{2x}{2} \Leftrightarrow 12 = x.$$

Här betyder dubbelpilen $\Leftrightarrow$ att ekvationerna är ekvivalenta, dvs. har exakt samma lösningsmängd. Vi ser alltså att den givna ekvationen har en enda lösning, nämligen $x = 12$. (Därmed vet vi alltså att Kal ifrån exemplet i förra avsnittet är 12 år gammal.)

Vi löser nu ekvationen $21 + x = x - 3$:

$$21 + x = x - 3 \Leftrightarrow (21 + x) - x = (x - 3) - x \Leftrightarrow 21 = -3.$$

Här försvann x och kvar fick vi bara orimligheten $21 = -3$. Inget x i världen kan få den likheten att gälla, alltså saknar ekvationen lösning.

Avslutningsvis löser vi ekvationen $12 - (x - 3) = 15 - x$:

$$12 - (x - 3) = 15 - x \Leftrightarrow 12 - x + 3 = 15 - x \Leftrightarrow 15 - x = 15 - x \Leftrightarrow 15 = 15.$$

Denna sista likhet gäller uppenbarligen alltid, så till denna ekvation är vilket reellt tal x som helst en lösning. Den har alltså oändligt många lösningar. □

Vi såg i exemplet ovan att en linjär ekvation med 1 obekant kunde ha 1, 0 eller oändligt många lösningar. Vi ska visa att detta faktiskt är de enda möjligheterna som finns. En linjär ekvation med en obekant kan alltid förenklas till formen $ax = b$. Om $a \neq 0$ är det enda talet som satisfierar ekvationen $x = a/b$, dvs. ekvationen har som det heter *unik* lösning. Om $a = 0$ och $b = 0$ så är varje reellt tal lösning till ekvationen, eftersom $0 \cdot x = 0$ för alla reella x. I det fallet har ekvationen oändligt många lösningar. Den sista möjligheten är att $a = 0$, men $b \neq 0$. I det fallet finns ingen lösning, eftersom $ax = 0 \cdot x = 0 \neq b$ för alla reella x.

Vi ska nu titta på en linjär ekvation med fler än en obekant. Här blir strategin att välja ut en av variablerna att lösa ut (få ensam på ena sidan) på samma sätt som vi gjorde med x ovan.

Exempel. Vi löser ekvationen $3x + 2y = 31$ genom att lösa ut y:

$$3x + 2y = 31 \Leftrightarrow (3x + 2y) - 3x = 31 - 3x \Leftrightarrow 2y = 31 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{31 - 3x}{2}.$$

Här ser vi att för varje x vi väljer så får vi precis ett y nämligen $y = (31 - 3x)/2$. Vi får alltså oändligt många lösningar. Två av dessa är $x = 5, y = 8$ och $x = 6, y = 13/2$. (Vi påminner om att talparet $x = 5, y = 8$ är en lösning.)

Denna ekvation var ju den vi fick i förra avsnittet då Beda köpte ett antal chokladkakor och tablettaskar. Vi ser nu när vi löser ekvationen att det inte finns en unik lösning och därför räcker inte informationen till för att räkna ut vad godiset kostar per styck. □

Om man har en linjär ekvation med fler än en obekant så får man alltid oändligt många lösningar (eller ingen lösning alls om alla obekanta försvinner vid förenkling).

Övningar

2.1.1 Lös följande ekvationer.

a. $3(2 - x) = -(1 + 2x)$
b. $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 10$
c. $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 7 - 7x$
d. $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 6 - 7x$
e. $\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 0$
f. $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 2\right) = \frac{2}{3}$

2.1.2 Lös ut y i följande ekvationer.

a. $3(2 - x) = -(1 + y)$
b. $3(5 - 3y) - 2(4 - x) = 10 + 2y$

2.2 Andragradsekvationer

En andragradsterm är en term i vilken den/de obekanta multiplicerats med varandra och med tal så att det sammanlagda gradtalet är två, t.ex. är $2x^2$, $3xy$, z^2 andragradstermer, medan xy^2, x^2y^2 inte är det. En ekvation i vilken den/de obekanta förekommer endast som första- och andragradstermer kallas en *andragradsekvation*. I det här avsnittet ska vi arbeta med andragradsekvationer med en obekant.

Även andragradsekvationer förenklas genom att man adderar eller subtraherar samma tal till båda sidor av ekvationen, multiplicerar eller dividerar båda leden med tal ($\neq 0$), eller gör omskrivningar. Syftet med förenklingarna och omskrivningarna är att få en ekvation som man klarar av att lösa och som är ekvivalent med den givna.

De enda andragradsekvationerna man kan lösa direkt är de som hör till den enklaste typen, $x^2 = d$ där d är ett positivt tal. Vi har ju att $\sqrt{d}$ är det positiva tal vars kvadrat är d, $(\sqrt{d})^2 = d$ om $d > 0$. Eftersom det också gäller att $(-\sqrt{d})^2 = d$ så har ekvationen de två lösningarna $\sqrt{d}$ och $-\sqrt{d}$. Att det inte kan finnas fler lösningarna återkommer vi till lite längre fram. T.ex. har ekvationen $x^2 = 9$ de två lösningarna $x_1 = \sqrt{9} = 3$ och $x_2 = -3$. Om d skulle vara lika med 0, får vi endast lösningen $x = 0$.

Exempel. Förhållandet mellan de två sidorna i en rektangel är 2:3. Om kortsidan är 10 m är alltså långsidan 15 m. Vi skall bestämma sidlängderna då arean är 54 m^2.

Om kortsidan är $2a$ m så är långsidan $3a$ m och arean $6a^2$ m^2. Alltså skall a vara lösning till $6a^2 = 54$. Division med 6 ger $a^2 = 9$ vars lösningar är 3 och -3. Endast positiva lösningen kan vara relevant så rektangelsidorna är 6 respektive 9 m. □

Vi klarar nu också av att lösa andragradsekvationer av typen $(x-s)^2 = d$ där d är ett positivt tal. Här är $x-s$ ett tal vars kvadrat är d. Då är $x-s = \sqrt{d}$ eller $x-s = -\sqrt{d}$. Lösningarna till $(x-s)^2 = d$ är således

$$x_1 = s + \sqrt{d} \text{ och } x_2 = s - \sqrt{d}.$$

Exempel. Ekvationen $(x-2)^2 = 9$ har de två lösningarna som ges av $x-2 = \sqrt{9} = 3$ och $x-2 = -\sqrt{9} = -3$. Alltså är $x_1 = 5$ och $x_2 = -1$. □

Exempel. Långsidan i en rektangel är 6 meter längre än kortsidan. Bestäm sidlängderna då arean är 55 m^2.

Antag att kortsidan är x m. Då är långsidan $x+6$ m och arean $x(x+6)$ m^2. Vi söker således en lösning till ekvationen $x(x+6) = 55$. Utveckling ger

$$x(x+6) = 55 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 55.$$

Genom att addera 9 till vänsterledet $x^2 + 6x$ blir uttrycket en jämn kvadrat

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = (x+3)^2.$$

Vi adderar därför 9 till båda sidor av ekvationen och får

$$\begin{aligned} x(x+6) = 55 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 6x = 55 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 55 + 9 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 64 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 3 = 8 \text{ eller } x + 3 = -8 \Leftrightarrow x = 5 \text{ eller } x = -11. \end{aligned}$$

Eftersom endast positiva lösningar är möjliga så får vi $x = 5$. Sidorna är med andra ord 5 respektive 11 m.

□

Metoden i det sista exemplet kallas *kvadratkomplettering*. Genom att addera en kvadrat med arean 9 m^2 gör vi om rektangeln till en kvadrat med sidan $x+3$. Rektangeln har arean 55 m^2, kvadraten har arean 64 m^2.

På samma sätt kan man kvadratkomplettera alla andragradsuttryck. Uttrycket

$$x^2 + 2rx = x(x+2r)$$

kan ses som arean av en rektangel med sidorna x och $x+2r$. Genom att addera en kvadrat med sidan r erhåller man en kvadrat med sidan $x+r$.

En rektangel med sidorna x och $x+2r$.

Kvadraten delas upp i en kvadrat och två rektanglar.

Om vi flyttar på en ena rektangeln så har vi nästan fått en större kvadrat; att vi lägger till den kallas för att vi kvadratkompletterar.

Klart! Den lilla kvadraten som vi beövde lägga till har sidlängd r, och därför area r^2.

Rent algebraiskt betyder kvadratkomplettering att vi, givet ett uttryck på formen $x^2 + bx$, försöker hitta ett tal vi kan addera, så att summan blir en jämn kvadrat. Eftersom $(x+s)^2 = x^2 + 2sx + s^2$, får vi att $2s$ måste vara lika med b och rätt tal att addera är $b^2/4$.

Med hjälp av kvadratkomplettering härleder vi nu en välkänd formel för lösningarna till vilken andragradsekvation som helst. Vi ska först titta på ekvationer där koefficienten

framför x^2 är lika med 1.

$$\begin{aligned} x^2+px+q=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x=-q \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \\ &\Leftrightarrow \quad x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ eller } x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \end{aligned}$$

som ger:

> Andragradsekvationen $x^2+px+q=0$ har för $(p/2)^2-q\geq 0$ lösningarna
>
> $$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \text{och} \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Resultatet ovan har du säkert använt många gånger. Ofta skrivs det med en formel:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Den är inte svår att memorera, men minnet blir lätt diffust efter ett tag. Därför är det betydligt bättre att kunna kvadratkomplettera och på det viset komma fram till lösningen utan att använda formeln. Kvadratkomplettering är dessutom en metod som används i flera andra sammanhang och har ett värde i sig. Tecknet $\pm$ är praktiskt vid kalkyler men man bör alltid ange de två rötterna separat.

Exempel. Vi löser två andragradsekvationer genom att använda formeln vi precis härledde.

a. Ekvationen $x^2+6x+5=0$ har rötterna

$$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{(-3)^2-5}=-3\pm\sqrt{9-5}=-3\pm\sqrt{4}=-3\pm 2$$

dvs. $x_1=-3+2=-1$ och $x_2=-3-2=-5$.

b. Om man vill använda formeln ovan när koefficienten framför x^2 inte är lika med 1 (men är skild från 0), måste man först dividera med den koefficienten. Ekvationen $6+3x-4x^2=0$ har koefficenten -4 framför x^2, så för att använda formeln måste vi först dividera med -4 vilket ger

$$x^2-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}=0.$$

Denna har lösningarna

$$x_{1,2}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9}{64}+\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9+96}{64}}=\frac{3}{8}\pm\frac{\sqrt{105}}{8}.$$

Alltså är $x_1=(3+\sqrt{105})/8$ och $x_2=(3-\sqrt{105})/8$. □

Vi ska nu härleda en formel som ger andragradsekvationens lösningar i det allmänna fallet, samt diskutera hur man lätt kan bestämma antalet reella lösningar. Betrakta ekvationen

$$ax^2+bx+c=0, \quad \text{där } a\neq 0.$$

Division av båda leden med $a\neq 0$ och kvadratkomplettering ger ekvationen

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0,$$

som är ekvivalent med

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Uttrycket $D=b^2-4ac$ kallas ekvationens *diskriminant* och dess tecken avgör hur många reella lösningar den givna andragradsekvationen har. För att ekvationen ska ha reella lösningar måste högerledet ovan vara icke-negativt. Eftersom nämnaren $4a^2$ alltid är positiv, betyder det att ekvationen har reella lösningar om och endast om $D=b^2-4ac\geq 0$. Vi sammanfattar:

> Andragradsekvationen $ax^2+bx+c=0$ har
>
> - två olika reella lösningar om och endast om $D=b^2-4ac>0$
> - en reell lösning om och endast om $D=b^2-4ac=0$
> - inga reella lösningar om och endast om $D=b^2-4ac<0$

Låt oss titta igen på uttrycket vi fick genom att kvadratkomplettera

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

För $D \geq 0$ kan vi använda konjugatregeln för att faktorisera, och får att den givna andragradsekvationen är ekvivalent med

$$\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

Eftersom en produkt endast blir noll då en eller flera av faktorerna är lika med noll, kan vi avläsa andragradsekvationens lösningar. (Vi ser också att det inte kan finnas fler än två lösningar.)

> Andragradsekvationen $ax^2+bx+c=0$ har för $D=b^2-4ac \geq 0$ de reella lösningarna
>
> $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{och} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Detta resultat kan också skrivas med en formel:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

För $D>0$ är de två reella lösningarna olika och den faktoriserade ekvationen har utseendet $(x-x_1)(x-x_2)=0$; för $D=0$ får vi samma lösning två gånger ($x_1=x_2$) och faktoriseringen ger $(x-x_1)^2=0$. Det finns anledning att betrakta den enda reella lösningen som två reella lösningar som råkar sammanfalla. Man säger att ekvationen för $D=0$ har en *dubbelrot*, eller, vilket är samma sak, att x_1 i det fallet har *multiplicitet två*.

Om man får en ekvation där faktoriseringen redan är gjord finns det ingen anledning att utveckla uttrycket för att sedan använda kvadratkomplettering eller någon lösningsformel. Man kan i det fallet avläsa lösningarna direkt.

Exempel. Ekvationen $(x-1)(x+3)=0$ har de två lösningarna $x_1=1$ och $x_2=-3$. Detta förklaras alltså av att en produkt av två tal är 0 om minst ett av talen är 0, men inte annars. Produkten $(x-1)(x+3)$ är 0 precis då $x-1=0$ eller $x+3=0$ vilket ger de två lösningarna.

På samma sätt ser vi att ekvationen $x^2+px=0$ har de två lösningarna $x_1=0$ och $x_2=-p$, eftersom $x^2+px=x(x+p)$. □

Notera att ur faktoriseringen följer

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Övningar

2.2.1 Lös ekvationerna

a. $x^2+3x-4=0$ b. $3+2x-x^2=0$ c. $2x^2=3+x$
d. $3x+7x^2=0$ e. $4x^2+9=12x$ f. $5x^2+3x=1$

2.2.2 Kvadratkomplettera

a. x^2+4x+1 b. $4x^2-36x+100$ c. $3-12x-x^2$

2.2.3 Faktoruppdela (med reella tal)

a. x^2+x-6 b. $8-6x-2x^2$ c. x^2-x-1
d. x^2+x+1

2.2.4 Bestäm en andragradsekvation med rötterna

a. 2 och -5 b. $-\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{3}$ c. $1+\sqrt{5}$ och $1-\sqrt{5}$

Facit

1.1.1 a. $7956 = 21 \cdot 378 + 18$ b. $7497 = 21 \cdot 357 + 0$
c. 7497 är delbart med 21

1.1.2 a. $3^2 \cdot 5 \cdot 11$ b. $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
c. $3 \cdot 83$

1.1.3 a. 319 b. -564

1.1.4 a. $a + 2 \cdot a \cdot b$
b. $2 \cdot a \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \cdot b - 2 \cdot a \cdot a - 2 \cdot a \cdot b = 2a^2b + 2ab^2 - 2a^2 - 2ab$

1.1.5 a. $-2 < 4 < 5 < 11$ b. $d, b, -a, -c$

1.2.1 a. $1/8$ b. $-281/28$ c. $-196/33$
d. $17/20$ e. $251/24$ f. $344/255$

1.2.2 a. $13/12$ b. $-11/420$

1.2.3 a. $1/4$ b. $3/34$ c. $39/22$
d. 24 e. $38/15$ f. $10/57$
g. $273/128$ h. $11011/1536$

1.2.4 a. -2 b. $253/340$ c. $-1349/1968$

1.2.5 a. $c > b > d > a$ b. $b > a > c > d$

1.3.1 a. 25 b. 32 c. 81
d. -64 e. 1 f. 100
g. 1 h. 1

1.3.2 a. $1/4$ b. $-1/27$ c. 1

1.3.3 a. 2^{-6} b. 2^2 c. 2^{-4}

1.3.4 a. $4/21$ b. -72

1.4.1 a. 0.7 b. 300 c. $15\sqrt{2}$
d. $\sqrt{2}/5$ e. $\sqrt{3}$ f. $10 - \sqrt{2}$

1.4.2 a. ± 5 b. $\pm\sqrt{5}$ c. $\pm 2/3$
d. $\pm 2\sqrt{6}/3$ e. 0

1.4.3 a. $\sqrt{6}/3$ b. $\sqrt{21}/7$ c. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
d. $\sqrt{11} + 3$ e. $-(2 + \sqrt{5})$ f. $3 - 2\sqrt{2}$

2.1.1 a. $x = 7$ b. $x = -3/7$ c. Alla tal.
d. Inga lösningar. e. $5/4$ f. $-4/3$

2.1.2 a. $y = 3x - 7$ b. $y = (2x - 3)/11$

2.2.1 a. 1 och -4
b. -1 och 3
c. -1 och $3/2$
d. 0 och $-3/7$
e. $3/2$
f. $-(3 + \sqrt{29})/10$ och $-(3 - \sqrt{29})/10$
g. $-(3 + \sqrt{29})/10$ och $-(3 - \sqrt{29})/10$

2.2.2 a. $(x+2)^2 - 3$ b. $(2x-9)^2 + 19$
c. $39 - (x+6)^2$

2.2.3 a. $(x-2)(x+3)$
b. $-2(x-1)(x+4)$
c. $(x - 1/2 - \sqrt{5}/2)(x - 1/2 + \sqrt{5}/2)$
d. $x^2 + x + 1$

2.2.4 a. $x^2 + 3x - 10 = 0$ b. $6x^2 - x - 2 = 0$
c. $x^2 - 2x - 4 = 0$

Sakregister

andragradsekvation, 17
aritmetikens fundamentalsats, 4
associativitet, 1

delar, 3
delare till, 3
delas av, 3
delbart med, 3
delmängd, 1
distributiva lagen, 2
divisor till, 3
dubbelrot, 20

ekvivalenta ekvationer, 16
element, 1
Erathostenes primtalssåll, 4

förkorta, 7
förlänga, 7
förstagradsekvation, 16
faktor i, 3
falsk rot, 16

heltal, 1

jämna tal, 3

kommutativitet, 1
konjugat, 13
kvadratkomplettering, 18
kvadratrot, 12
kvot, 2

lösa ut, 15
linjär ekvation, 16

mängd, 1
mindre än, 2
minsta gemensamma nämnare, 7
multipel av, 3

naturliga tal, 1
negativa heltal, 1

om och endast om, 9

potens, 10
precis när, 9
primtal, 3

rötter, 12
rationella tal, 6
relativt prima, 7
rest, 2

sammansatta tal, 3
större än, 2

udda tal, 3