Agenda

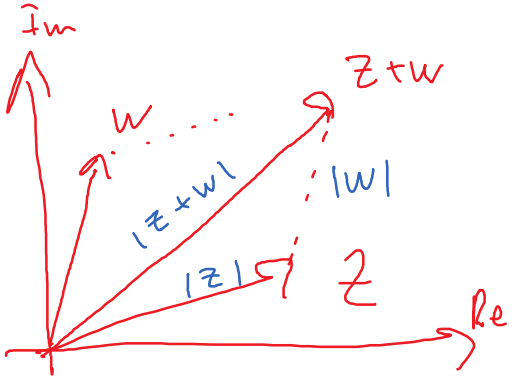
den 3 december 2020 10:18

Mer om komplexa tal:

$$|z\,w| = |z|\,|w|$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$|z+w| \leq |z|+|w|$$



$$z = |z|e^{i\theta}, \quad w = |w|e^{i\varphi}$$

$$z\cdot w = |z|\,|w|\,e^{i(\theta+\varphi)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}$$

$$\arg(z\cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$$

$$\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{(Eulers formel)}$$

$$\boxed{e^{i\pi}+1=0}$$ Eulers identitet

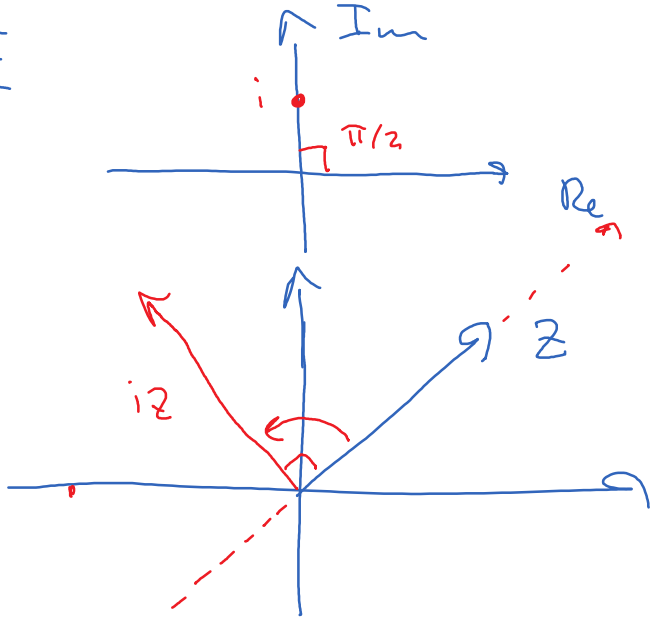
$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{=0} = -1$$

$= e^{i\varphi} \cdot |z| e^{i\theta} = |z| e^{i(\theta+\varphi)}$

$e^{i\varphi} \cdot z$ roterar z vinkeln φ motsols

$i \cdot z$ roterar z vinkeln $\frac{\pi}{2}$ motsols

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

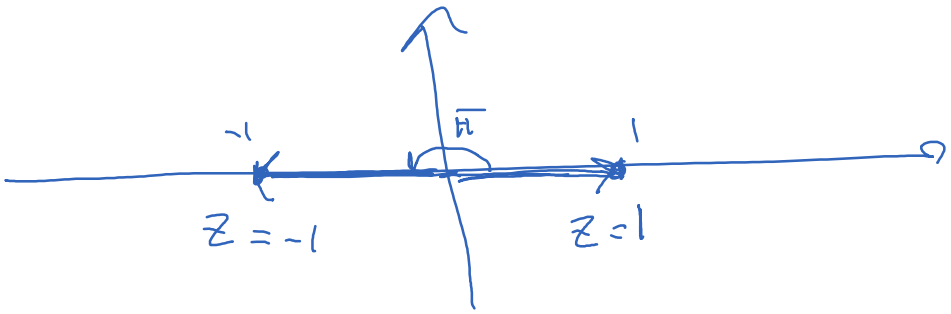


$|i| = 1$

$|e^{i\varphi}| = 1$

$0 = 0 \cdot e^{i\theta}$, $\arg(0) = ?$

$1 = e^{i \cdot 0}$, $-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$



$\arg(-1) = \pi$, $\arg(1) = 0 \quad (+n \cdot 2\pi)$

Breakout 1

den 3 december 2020 10:19

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

Bestäm real- och imaginärdelar för det komplexa talet

$$z = \frac{2+3i}{5+i} - \frac{2-3i}{3-2i}$$

Lösning:

$$\frac{2+3i}{5+i} = \frac{(2+3i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{2\cdot 5 - 2i + 3\cdot 5i - 3i^2}{25+1} = \frac{10 - 2i + 15i + 3}{26} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\frac{2-3i}{3-2i} = \frac{(2-3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+4i-9i-6i^2}{9+4} = \frac{12-5i}{13}$$

Dvs

$$\frac{2+3i}{5+i} - \frac{2-3i}{3-2i} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \left(\frac{12}{13} - i\,\frac{5}{13}\right) = \frac{13}{26} - \frac{24}{26} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{13}\right) = \frac{-11}{26} + i\,\frac{23}{26}$$

Svar: $\mathrm{Re}(z) = -\frac{11}{26}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{23}{26}$

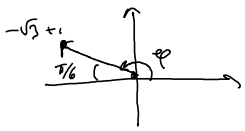
Uppgift 2

den 1 december 2020 09:49

Lös ekvationen $z^6 = -\sqrt{3} + i$

Lösning

1. Skriv $w = -\sqrt{3} + i$ på polär form: $|w| = \sqrt{3+1} = 2$, $w = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

2:a 

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

eller $\varphi = \pi + \arctan\frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

2. Skriv z på polär form $z = re^{i\theta}$

V.s. får

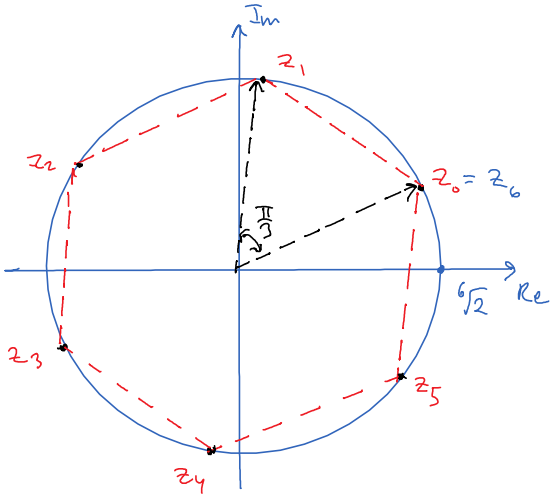
$$z^6 = r^6 e^{i6\theta} = 2\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

3. Identifiera r och θ

$$r^6 = 2 \text{ och } 6\theta = \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi$$

$$r = \sqrt[6]{2} \text{ och } \theta_k = \frac{5\pi}{36} + k\cdot\frac{2\pi}{6} = \frac{5\pi}{36} + k\cdot\frac{\pi}{3}, \quad k = 0,1,2,3,4,5 \quad (6 \text{ lösningar})$$

Dvs $z_k = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{36} + k\cdot\frac{\pi}{3}\right)}$, $k = 0,1,2,3,4,5$



$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$

$\frac{5\pi}{36} = 25^\circ$, $k = 0$

$\frac{17\pi}{36} = 85^\circ$, $k = 1$

$\frac{29\pi}{36} = 145^\circ$, $k = 2$

$\frac{41\pi}{36} = 205^\circ$, $k = 3$

$\frac{53\pi}{36} = 265^\circ$, $k = 4$

$\frac{65\pi}{36} = 325^\circ$, $k = 5$

Triangel i planet

den 1 december 2020 09:49

En triangel i planet har hörn i punkterna $(0,0)$, $(4,2)$ och $(2,6)$

a) Triangeln roteras $60°$ ($\frac{\pi}{3}$ rad) motsols kring $(0,0)$.

Ange de nya koordinaterna för triangeln.

b) Vilken area har triangeln?

Ledning: a) Lägg triangeln i komplexa talplanet och multiplicera hörnen $(4,2) \leftrightarrow 4+2i$ och $(2,6) \leftrightarrow 2+6i$ med $e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) Arean av triangel:

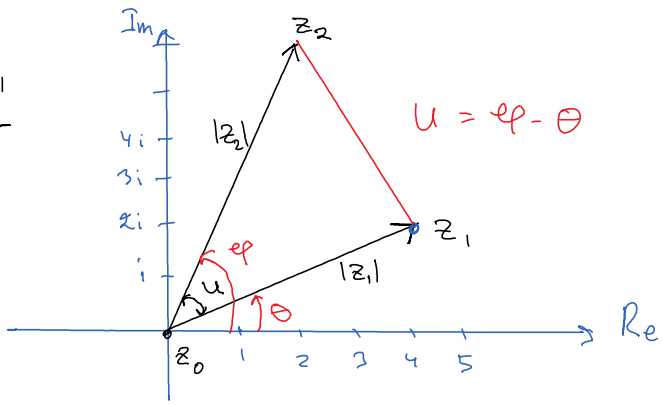
$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin u}{2}$

Lösning:

Vi lägger in triangeln i det komplexa talplanet med $z_0 = 0 \ (0+i\cdot 0) \leftrightarrow (0,0)$ Se figur!

$z_1 = 4+2i \leftrightarrow (4,2)$

$z_2 = 2+6i \leftrightarrow (2,6)$



Om hörnen z_1 respektive z_2 multipliceras med $e^{i\pi/3}$ så roterar dessa $\frac{\pi}{3}$ (dvs $60°$) motsols

$$e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z = \underbrace{|e^{i\pi/3}|}_{=1} |z| \cdot e^{i(\frac{\pi}{3} + \arg(z))} = |z| e^{i(\frac{\pi}{3} + \arg(z))}$$

"z roterad $60°$ motsols"

De nya hörnen är alltså

$w_0 = z_0 = 0$, $w_1 = e^{i\pi/3} \cdot z_1$, $w_2 = e^{i\pi/3} \cdot z_2$

Dvs

$$w_1 = e^{i\pi/3} \cdot (4+2i) = (\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})(4+2i) = (\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2})(4+2i)$$

$$= 2 + i + i2\sqrt{3} + \sqrt{3}i^2 = 2 - \sqrt{3} + i(1+2\sqrt{3})$$

$$w_2 = e^{i\pi/3}(2+6i) = (\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})(2+6i) = (\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2})(2+6i)$$

$$= 1 + 3i + i\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i^2 = 1 - 3\sqrt{3} + i(3+\sqrt{3})$$

Svar: Koordinaterna för triangeln efter att den roterat är $(0,0)$, $(2-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3})$ och $(1-3\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$

b) Arean av triangeln ges av (Areasatsen för trianglar)

$$A = \frac{|z_1|\,|z_2|\,\sin(u)}{2}$$ där u är vinkeln mellan z_1 och z_2

Om $\arg(z_1) = \theta$ och $\arg(z_2) = \varphi$ så ger figuren att $u = \varphi - \theta$

Ett komplext tal som har detta som argument är $\frac{z_2}{z_1}$

Men $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+6i}{4+2i} = \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i-3i^2}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$

och $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arctan\frac{1}{1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ $(45°)$

Till sist

$$A = \frac{\sqrt{4^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+6^2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{40}\cdot 1/\sqrt{2}}{2}$$

$20 = 2\cdot 10$
$40 = 4\cdot 10$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{10}\;/\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \underline{\underline{10}}$$

Svar: Arean är 10 a.e.

Alternativt kan vi beräkna θ och φ direkt

$\theta = \arg(4+2i) = \arctan\frac{2}{4} = \arctan\frac{1}{2} \approx 26.57°$

$\varphi = \arg(2+6i) = \arctan\frac{6}{2} = \arctan 3 \approx 71.57°$

och

$u = \arctan 3 - \arctan\frac{1}{2} \approx 45.00°$

Uppgift 3

den 3 december 2020 12:50

(4.19) Visa att

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4} \implies |z-2| = 2$$

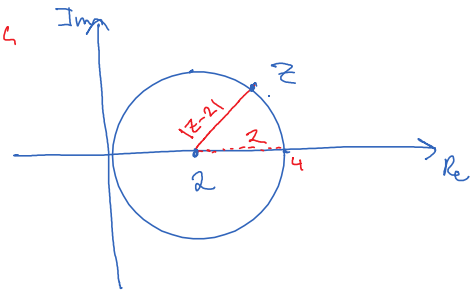
Ledning: Sätt $z = x+iy$ och beräkna $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

Villkoret $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$ ger ett samband mellan x^2+y^2 och x

Uttrycket $|z-2| = 2$ beskriver en cirkel i komplexa talplanet med centrum i $z=2$ och med radie 2:

Vi utnyttjar sambandet ovan för att beräkna

$$|z-2|^2 = |(x-2)+iy|^2 = \dots$$



Kan vi visa att detta är lika med 4 så är vi klara: ($|z-2|^2 = 4 \iff |z-2| = 2$)