

Bestäm k så att gränsvärdet existerar. Beräkna också gränsvärdet

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-k}{x^2+x-20} - \frac{1}{x-4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (kx - \sqrt{4x^2+x+4})$$

a) gränsvärdet är av typen $\frac{4-k}{0} - \frac{1}{0}$

$$\frac{x-k}{x^2+x-20} - \frac{1}{x-4} = \left[x^2+x-20 = (x-4)(x+5) \right] = \frac{x-k}{(x-4)(x+5)} - \frac{1}{x-4} = \frac{x-k-(x+5)}{(x-4)(x+5)}$$

$$= \frac{-k-5}{(x-4)(x+5)} \xrightarrow{x \rightarrow 4} \frac{-k-5}{0}$$

Nemnare $\rightarrow 0$ då $x \rightarrow 4 \Rightarrow$ Täljare $\rightarrow 0$ då $x \rightarrow 4$

$$\text{Dvs } -k-5 = 0, k = -5.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-k}{x^2+x-20} - \frac{1}{x-4} = 0 \text{ om } k = -5 \text{ annars existerar ej grv.}$$

$$k=-5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+5}{x^2+x-20} - \frac{1}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(-5)-5}{(x-4)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{0}{(x-4)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} 0 = 0$$

(med $k=-5$ i ovan)

$= 0$
för alla $x \neq 4$
men nära 4

$$\left(\frac{0}{10^{-6}} = 0 \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (kx - \sqrt{4x^2+x+4}) = \text{"}\infty - \infty\text{"} \quad (k > 0)$$

$$kx - \sqrt{4x^2+x+4} = \frac{(kx - \sqrt{4x^2+x+4})(kx + \sqrt{4x^2+x+4})}{kx + \sqrt{4x^2+x+4}} = \frac{k^2x^2 - (4x^2+x+4)}{kx + \sqrt{4x^2+x+4}}$$

$$= \frac{(k^2-4)x^2 - x - 4}{kx + x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}} \xrightarrow{k^2-4 \neq 0} \frac{\infty - 1 - 0}{k + \sqrt{4+0+0}} = \text{"}\pm \infty\text{"}$$

då $x \rightarrow \infty$

gränsvärdet existerar ej om $k^2-4 \neq 0$

$$(\sqrt{x^2} = x \text{ om } x > 0)$$

V. undersöker $k^2 = 4, k = \pm 2$

$$1) k=2: \text{Då är } \lim_{x \rightarrow \infty} (kx - \sqrt{4x^2+x+4}) \stackrel{+}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1-4/x}{k + \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}} = \frac{-1-0}{2+\sqrt{4+0+0}} = -\frac{1}{4}$$

$$1) k=2: \text{Då är } \lim_{x \rightarrow \infty} (kx - \sqrt{4x^2 + x + 4}) \stackrel{+}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - 4/x}{2 + \sqrt{4 + 1/x + 4/x^2}} = \frac{-1 - 0}{2 + \sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

$$2) k=-2 \text{ Då är } \lim_{x \rightarrow \infty} (kx - \sqrt{4x^2 + x + 4}) \stackrel{+}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - 4/x}{-k + \sqrt{4 + 1/x + 4/x^2}} = \frac{-1 - 0}{-2 + \sqrt{4}} = \frac{-1}{0}$$

gränsvärdet existerar ej !!

Svar $k=2$, $grv = -\frac{1}{4}$

b) Alternativ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (kx - \sqrt{4x^2 + x + 4}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (kx - x\sqrt{4 + 1/x + 4/x^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (k - \sqrt{4 + 1/x + 4/x^2}) \\ = "\infty \cdot (k - \sqrt{4 + 0 + 0})" = "\infty \cdot (k - 2)"$$

Om gränsvärdet existerar så måste det vara av typen " $\infty \cdot 0$ " dvs $k=2$.

$$\text{Då är } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + x + 4}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (2 - \sqrt{4 + 1/x + 4/x^2}) (2 + \sqrt{4 + 1/x + 4/x^2})}{2 + \sqrt{4 + 1/x + 4/x^2}} = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (4 - (4 + 1/x + 4/x^2))}{2 + \sqrt{4 + 1/x + 4/x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (-1/x - 4/x^2)}{2 + \sqrt{4 + 1/x + 4/x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - 4/x}{2 + \sqrt{4 + 1/x + 4/x^2}} \\ = \frac{-1 + 0}{2 + \sqrt{4 + 0 + 0}} = \frac{-1}{2 + 2} = -\frac{1}{4}$$

Beräkna gränsvärdena

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6}$$

 $\frac{0}{0}$

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$x^2 + 5x + 6 \Big|_{x=-3} = 9 - 15 + 6 = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x^2 - 7x + 6}$$

 $\frac{0}{0}$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(9x)}{\sin(7x)}$$

 $\frac{0}{0}$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{x+2} = \frac{-3-3}{-3+2} = \frac{-6}{-1} = 6$$

$$b) x^2 - 7x + 6 \Big|_{x=6} = 36 - 42 + 6 = 0, \quad x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1)$$

$$\frac{\sqrt{x+3} - 3}{x^2 - 7x + 6} = \frac{(\sqrt{x+3} - 3)(\sqrt{x+3} + 3)}{(x-6)(x-1)(\sqrt{x+3} + 3)} = \frac{\overbrace{x+3-9}^{=x-6}}{(x-6)(x-1)(\sqrt{x+3} + 3)} = \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 3)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{(6-1)(\sqrt{6+3} + 3)} = \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{30} \quad \text{då } x \rightarrow 6$$

$$\text{Svar } \lim_{x \rightarrow 6} \dots = \frac{1}{30}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right]$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 9x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\cos 9x} \cdot \frac{1}{\sin 7x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 9x} \cdot \frac{9 \sin 9x}{9x} \cdot \frac{7x}{7 \sin 7x} = \frac{9}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 9x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{9x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 7x}$$

$$= \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{9x} = \left[\begin{array}{l} t = 9x \rightarrow 0 \\ \text{då } x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 7x} = \left[\begin{array}{l} t = 7x \rightarrow 0 \\ \text{då } x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} 1 / \frac{\sin t}{t} = 1/1 = 1$$

$$\text{Svar } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 9x}{\sin 7x} = \frac{9}{7} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{9}{7}$$

Beräkna

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \ln x - \ln(x^2 + 3x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos 2 \cdot \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$a) \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \overbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}^{= 1 - \sin^2 x} = 1 - 2 \sin^2 x \\ 1 - \cos 2x = 1 - (1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x \end{array} \right] = \frac{2 \sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \left[\begin{array}{l} t = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \\ \text{då } x \rightarrow 0 \end{array} \right] = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 1} t^2 = 2 \cdot 1^2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \ln x - \ln(x^2 + 3x) = \infty - \infty$$

$$\begin{aligned} 2 \ln x - \ln(x^2 + 3x) &= \ln x^2 - \ln(x^2 + 3x) = \ln \frac{x^2}{x^2 + 3x} \\ &= \ln \frac{1}{1 + 3/x} \end{aligned}$$

högsta gradstermer
i nämnaren
↓
[delar med x^2 ; täljare
och nämnare]
 x^2 dominerar för stora x

Alltså är

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \ln x - \ln(x^2 + 3x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{1 + 3/x} = \left[3/x \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \right] = \ln \frac{1}{1+0} = \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bestäm konstanten a så att

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & , x < 1 \\ 5x + a & , x \geq 1 \end{cases}$$

är kontinuerlig i $x = 1$

Lösning $\left[\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \right]_{x=1} = 1 - 3 + 2 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

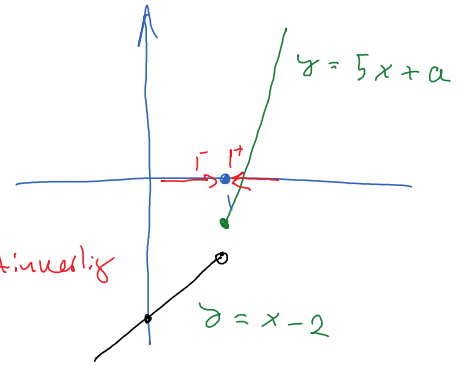
Dvs $f(x) = \begin{cases} x - 2 & , x < 1 \\ 5x + a & , x \geq 1 \end{cases}$ $\left[\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = x - 2 \right]$

Vi bestämmer a s.a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$(\Rightarrow) f(x)$ är kontinuerlig
i $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$



$(x < 1)$
 $V_L = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 2 = 1 - 2 = -1$

$H_L = \lim_{x \rightarrow 1^+} 5x + a = 5 \cdot 1 + a = 5 + a$

lika $\Leftrightarrow 5 + a = -1$,
 $V_L = H_L$
 $a = -6$

Bestäm konstanterna a och A så att

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + a}{x^2 + x - 6} & , x \neq 2, \\ A & , x = 2 \end{cases} \quad (x \neq -3)$$

är kontinuerlig i $x = 2$.

Lösning [Nämnare: $(x^2 + x - 6)|_{x=2} = 4 + 2 - 6 = 0$; $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$]

Vi skall undersöka $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ som vi nu ser är av typen $\frac{0}{0}$

Om gränsvärdet existerar så måste $\lim_{x \rightarrow 2} \text{"täljare"} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 7x + a = 4 - 14 + a = 0$

Dvs $a = 10$ (Med $a = 10$ så är $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{0}$)

$$\text{Men } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + x - 6} = \left[x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{x+3} = \frac{2-5}{2+3} = -\frac{3}{5} \quad (= A)$$

Dvs $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 2$ om $A = f(2) = \underline{\underline{-\frac{3}{5}}}$

$$\text{Tg då är } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

vilket innebär att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 2$

Kommentar:

Med det här valet av A så är $f(x) = \frac{x-5}{x+3}$, alla $x \neq -3$

Bestäm konstanterna a och b så att

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{ax+b}{x^2-1} \right) = 2$$

Lösning

$$VL = \frac{2}{x-1} - \frac{ax+b}{x^2-1} = \left[\text{gör liknämning} \quad x^2-1 = (x-1)(x+1) \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot (x+1) - (ax+b)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(2-a)x + 2-b}{(x-1)(x+1)} \quad \parallel \begin{array}{l} \text{Notera att nämnare} \rightarrow 0 \\ \text{då } x \rightarrow 1 \\ \Rightarrow \text{Täljare} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 1 \end{array}$$

Dv Täljare: $(2-a)x + 2-b \big|_{x=1} = 2-a + 2-b = 0$, $1-(a+b)=0$, $a+b=4$

Sätt in $b = 4-a$, (*)

$$VL = \frac{(2-a)x + \overbrace{2-(4-a)}^{-(2-a)}}{(x-1)(x+1)} = \frac{(2-a)x + \overbrace{a-2}^{-(2-a)}}{(x-1)(x+1)} = \frac{(2-a)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$= \frac{2-a}{x+1} \rightarrow \frac{2-a}{1+1} = \frac{2-a}{2} = 1 - \frac{a}{2} \quad \text{då } x \rightarrow 1$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = 1-2 = -1, \quad \underline{\underline{a = -2}}$$

Svar: $a = -2$
 $b = 4-a = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{-2x+6}{x^2-1} \right) = 2$$