Breakout 1

den 15 december 2020 09:22

1 a Skriv talet $\frac{3-4i}{2-i} \cdot \frac{-3+11i}{1+3i}$ på formen $x + iy$, där x och y är reella tal.

1 b Bestäm real- och imaginärdelen, absolutbeloppet samt argumentet av det komplexa talet

$$z = (4-i)(2+i) - \frac{3+11i}{1+i}.$$

2a Lös ekvationen $z^4 = -16$. Skriv lösningarna på formen $x + iy$.

2b Beräkna $(3 - i3\sqrt{3})^{76}$ och skriv svaret på formen $x + iy$.

2c Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3})$. Lösningarna ska uttryckas i så förenklad form $a + bi$ som möjligt.

3 Beräkna följande gränsvärden:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\tan 7x}$, (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+4x^3} - \sqrt{x^4+1}}{x+5}$.

4 I fyrhörningen $ABCD$ har sidorna följande längder: $|AB| = 8$ l.e., $|BC| = 5$ l.e., $|CD| = 5$ l.e. och $|DA| = 3$ l.e. Vinkeln i hörnet B är $60°$.

(a) Beräkna längden av diagonalen AC.

(b) Beräkna vinkeln i hörnet D. Svara dels i grader, dels i radianer.

5 Substansmängden av radon-222 i ett radioaktivt preparat vid tiden t [timmar] ges av funktionen $n(t) = 50e^{kt}$ [mol] där k är ett givet tal. Vid tiden $t = 92$ timmar är substansmängden $n(t) = 25$ mol. Vad är k? (Du får svara med logaritmuttryck.) (3p)

6 Lös ekvationen $z^2 = 8 - 6i$. Skriv lösningarna på formen $x + iy$.

7 (a) Beräkna $\tan v$ om $\sin v = 7/8$ och $\frac{\pi}{2} < v < \pi$.

(b) Bestäm alla lösningar till ekvationen $4 + 4\sin v = 3\cos^2 v$. Svara i radianer.

1 a Skriv talet $\frac{3-4i}{2-i} \cdot \frac{-3+11i}{1+3i}$ på formen $x+iy$, där x och y är reella tal.

Multiplicera ihop täljare respektive nämnare (var för sig)
Förenkla och multiplicera sedan med konjugatet av
nämnare i täljare och nämnare: (Svar: $8+i$)

1 b Bestäm real- och imaginärdelen, absolutbeloppet samt argumentet av det komplexa talet

$$z = (4-i)(2+i) - \frac{3+11i}{1+i}.$$

Svar: $2-2i$

2a Lös ekvationen $z^4 = -16$. Skriv lösningarna på formen $x+iy$.

Binomisk ekvation (med $n=4$):

Skriv om HL på polär form, $w=-16=16e^{i\varphi}$?

Skriv z på polär form $z=re^{i\theta}$, $r=|z|$, $\theta=\arg(z)$

Då gäller $z^4=-16$

$\iff r^4e^{i4\theta}=16e^{i\varphi}$, I

Identifiera absolutbelopp och argument

$r^4=16$

$4\theta = \varphi + k\cdot 2\pi$, k heltal

Bestäm z: $z_k = 2e^{i\cdots}$, $k=0,1,2,3$

Svar: $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
$z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
$z_2=-z_0=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$
$z_3=-z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

2b Beräkna $(3-i3\sqrt{3})^{76}$ och skriv svaret på formen $x+iy$.

Skriv om $w=3-i3\sqrt{3}$ på polär form $w=\rho e^{i\varphi}$

och använd de Moivres formel.

$(3-i\sqrt{3})^{76} = (\rho e^{i\varphi})^{76} = \rho^{76}\cdot e^{i76\varphi}$

Ta bort alla multiples av 2π i 76φ

Bestäm sedan $x+iy$

Svar:
$6^{76}\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= 6^{75}(-3+i3\sqrt{3})$

båda svaren ok

2c Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^4 = 2(-1+i\sqrt{3})$.
Lösningarna ska uttryckas i så förenklad form $a+bi$ som möjligt.

Se uppgift 3

3 Beräkna följande gränsvärden:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\tan 7x}$, (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+4x^3}-\sqrt{x^4+1}}{x+5}$.

Svar: a) $\frac{5}{7}$, b) 2

4 I fyrhörningen $ABCD$ har sidorna följande längder: $|AB| = 8$ l.e., $|BC| = 5$ l.e., $|CD| = 5$ l.e. och $|DA| = 3$ l.e. Vinkeln i hörnet B är $60°$.

(a) Beräkna längden av diagonalen AC.

(b) Beräkna vinkeln i hörnet D. Svara dels i grader, dels i radianer.

Se uppgift 1

5 Substansmängden av radon-222 i ett radioaktivt preparat vid tiden t [timmar] ges av funktionen $n(t) = 50e^{kt}$ [mol] där k är ett givet tal. Vid tiden $t = 92$ timmar är substansmängden $n(t) = 25$ mol. Vad är k? (Du får svara med logaritmuttryck.) (3p)

Se uppgift 2

6 Lös ekvationen $z^2 = 8 - 6i$. Skriv lösningarna på formen $x + iy$.

Ansätt $z = x + iy$. Då är $z^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$

Då är $z^2 = 8 - 6i$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = 8 - 6i$

Identifiera real och imaginärdelar

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

Hjälpekvation:

$x^2 + y^2 = |z^2| = |8 - 6i| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = .$

Bestäm x och y (de är reella!) ...

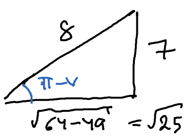
Svar: $z = \pm(3 - i)$

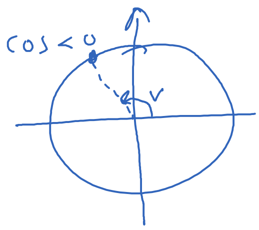
kontroll: $(3-i)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot i + (-i)^2$
$= 9 - 1 - 6i = \underline{\underline{8 - 6i}}$
ok.

7 (a) Beräkna $\tan v$ om $\sin v = 7/8$ och $\frac{\pi}{2} < v < \pi$.

(b) Bestäm alla lösningar till ekvationen $4 + 4\sin v = 3\cos^2 v$. Svara i radianer.

a) Med hjälptriangel:





Håll reda på tecken:

$\tan v = $ (enligt figurer) $= \underline{\underline{-\frac{7}{5}}}$.

b) Skriv om $\cos^2 v$ m.h.a trigonometriska ettan: $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$

Dvs $\cos^2 v = 1 - \sin^2 v$

V. erhålles en 2:a gradsekvation i $t = \sin v$.

Bestäm t och sedan $\sin v$.

Man erhålles $\sin v = -1$ eller $\sin v = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow$ $v = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ eller

$v = \arcsin(-\frac{1}{3}) + n \cdot 2\pi$ eller

$v = \pi - \arcsin(-\frac{1}{3}) + n \cdot 2\pi$ n är ett godtyckligt heltal.

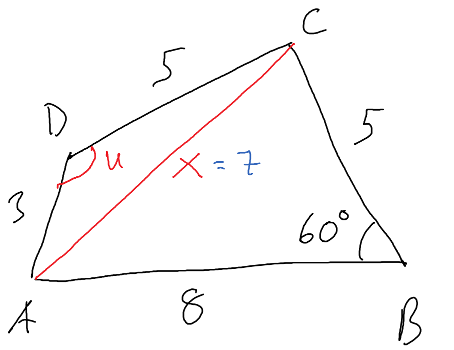
Uppgift 1

den 15 december 2020 09:22

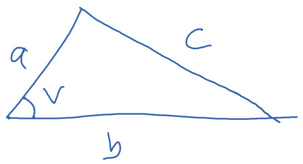
I fyrhörningen $ABCD$ har sidorna följande längder: $|AB| = 8$ l.e., $|BC| = 5$ l.e., $|CD| = 5$ l.e. och $|DA| = 3$ l.e. Vinkeln i hörnet B är $60°$.

(a) Beräkna längden av diagonalen AC.

(b) Beräkna vinkeln i hörnet D. Svara dels i grader, dels i radianer.



a) cosinussatsen säger



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos v$$

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \\ c = x \end{cases} \qquad v = 60°$$

v	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Här gäller att $x^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 60° = 64 + 25 - \cancel{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{1}{\cancel{2}} =$

$= 49$

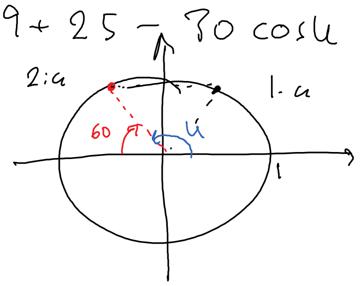
Dvs $\underline{x = 7}$

b) Vi använder cosinussatsen igen med $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$, $v = u$.

Dvs $\underbrace{7^2}_{=49} = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos u = \underbrace{9 + 25}_{34} - 30\cos u$

$30\cos u = 34 - 49 = -15$

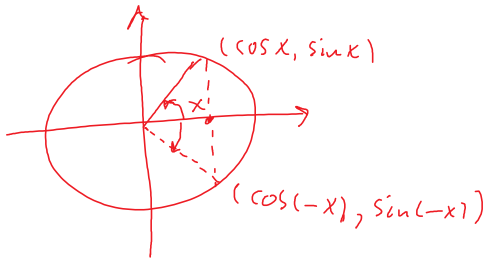
$\cos u = -\frac{15}{30} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{<0}$, $u \in$ 2:a



$u = 180° - 60° = 120°$

Men $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ dvs $\underline{u = 120°} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 180° - \arccos\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$



$$\begin{cases} \arccos(x) \in [0, 180°] \\ \arcsin(x) \in [-90°, 90°] \end{cases}$$

Uppgift 2

den 15 december 2020 10:43

Substansmängden av radon-222 i ett radioaktivt preparat vid tiden t [timmar] ges av funktionen $n(t) = 50e^{kt}$ [mol] där k är ett givet tal. Vid tiden $t = 92$ timmar är substansmängden $n(t) = 25$ mol. Vad är k? (Du får svara med logaritmuttryck.) (3p)

Lösning

$n(t) = 50 \cdot e^{k \cdot t}$ [mol], t = antal timmar

$n(0) = 50 \cdot e^{k \cdot 0} = 50 \cdot e^0 = \underbrace{50}_{\text{startvärdet}}$

Bestäm k om $n(92) = 25$ [mol]

Dvs vi har

$$n(92) = 50 \cdot e^{k \cdot 92} = 25 \quad \text{(dela med 50)}$$

$$e^{92 \cdot k} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

Logaritmera båda sidor:

$$\underbrace{\ln e^{92k}}_{92k} = \ln \frac{1}{2} = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2 = -\ln 2$$

$\ln e^x = x, \; x \in \mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x, \; x > 0$

$$k = -\frac{\ln 2}{92} \approx -7.53 \times 10^{-3}$$

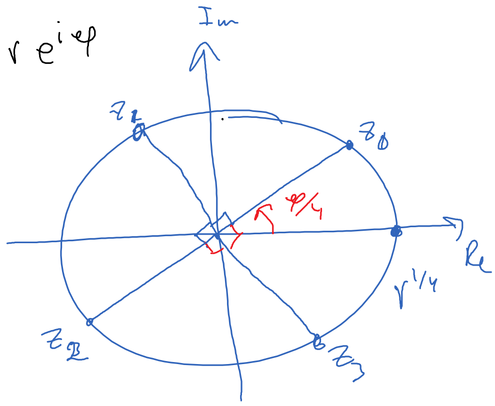
Uppgift 3

den 15 december 2020 10:55

2c

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^4 = 2(-1+i\sqrt{3})$.
Lösningarna ska uttryckas i så förenklad form $a+bi$ som möjligt.

$$z^4 = w = re^{i\varphi}$$



Lösning: Skriv om w på polär form

$w = 2\cdot(-1+i\sqrt{3})$, $r = |w|$, $\underline{w = re^{i\varphi}}$

$$|w| = 2\cdot|-1+i\sqrt{3}| = 2\cdot\sqrt{\underbrace{(-1)^2}_{=1}+\underbrace{(\sqrt{3})^2}_{=3}} = 2\cdot 2 = 4$$

$$w = 4\cdot\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}, \quad \text{Bestäm } \varphi: \begin{cases}\cos\varphi = -\frac{1}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}, \quad \varphi = \pi-\frac{\pi}{3}$$

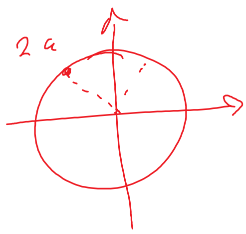
$$= 4\cdot e^{i\,2\pi/3}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$= \pi + \arctan(-\sqrt{3})$$

$$= \pi - \underbrace{\arctan(\sqrt{3})}_{\frac{\pi}{3}}$$

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1||z_2|$$



Skriv om z på polär form

$z = \rho e^{i\theta}$, $\rho = |z|$, $\theta = \arg(z)$.

$$z^4 = (\rho\cdot e^{i\theta})^4 = \rho^4\cdot(e^{i\theta})^4 = [\text{de Moivres formel}] = \rho^4\cdot e^{i4\theta}$$

Dvs

$$z^4 = w$$

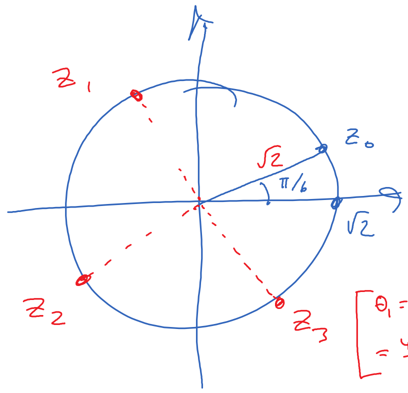
$$\Longleftrightarrow \quad \rho^4 e^{i4\theta} = 4\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

[identifiera absolutbelopp och argument]

$$\Longleftrightarrow \quad \rho^4 = 4 \implies \rho^2 = 2, \quad \rho = \sqrt{2}$$

$$4\theta = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

$$\theta_k = \frac{2\pi}{3}/4 + k\cdot\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{2}$$



$$\left[\theta_1 = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}\right.$$

Dvs $z_k = \sqrt{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$, $k = 0,1,2,3$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z_2 = -z_0 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = -z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

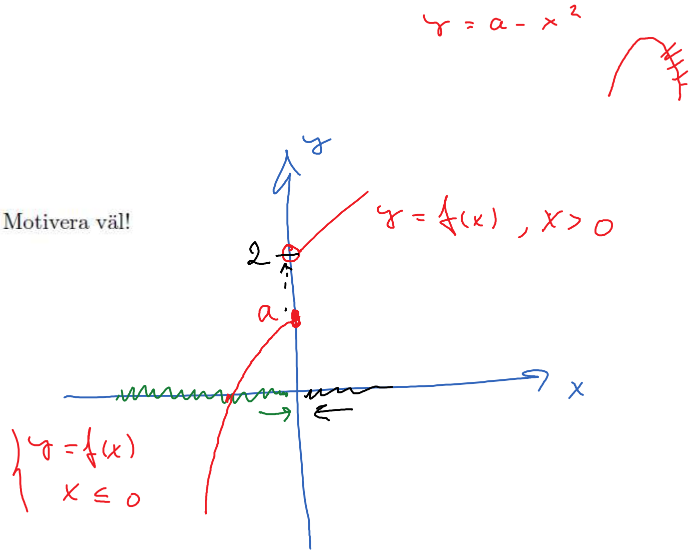
Uppgift 4

den 15 december 2020 11:42

. En funktion f definieras för alla reella tal x enligt

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{om} \quad x \le 0 \\ \frac{\cos x \sin 2x}{x} & \text{om} \quad x > 0 \end{cases}$$

Hur ska man välja konstanten a för att f ska vara en kontinuerlig funktion? Motivera väl!



Lösning

$f(x)$ är kontinuerlig för alla $x > 0$ och för alla $x < 0$

Vi undersöker $x = 0$:

Vill att $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = a - 0^2 = a$ (existens av gr.v. & $= a$)

Men om 1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ 2) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ så existerar $\lim_{x \to 0} f(x)$

2) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \left[\begin{matrix} \text{notera} \\ x < 0 \end{matrix} \right] = \lim_{x \to 0^-} (a - x^2) = a - 0^2 = a$

1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left[\begin{matrix} \text{notera} \\ x > 0 \end{matrix} \right] = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x \cdot \sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \cos x \cdot \lim_{x \to 0^+} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} =$

$= \underbrace{\cos 0}_{=1} \cdot 2 \cdot \lim \frac{\sin 2x}{2x} = \left[\begin{matrix} t = 2x \to 0^+ \\ \text{då } x \to 0^+ \end{matrix} \right] = 2 \cdot \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 2 \cdot 1 = 2$

Dvs 1) & 2) ger att $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$ om.m. $\underline{\underline{2 = a}}$

Med $a = 2$ så är $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = a = 2$

och $f(x)$ är kontinuerlig även i $x = 0$.

Breakout 2

den 15 december 2020 09:23

1 I en triangel är två sidor 5 cm och 6 cm, vinkeln mellan dem är $20°$.
Beräkna återstående sida och vinklar.

2 Ekvationen $z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 4z + 20 = 0$ har lösningarna $z = 2 - i$ och $z = 2i$.
Bestäm de övriga lösningarna.

3 Ekvationen $z^4 - 4z^3 + 15z^2 - 8z + 26 = 0$ har en lösning $z = \sqrt{2}i$.
Vilka är de övriga lösningarna?

4 Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a-x^2}{2+x} & \text{om} \quad x \neq -2 \\ b & \text{om} \quad x = -2 \end{cases}$$

är kontinuerlig. Vad är a och b?

5 Lös ekvationerna

(a) pH-skalan definieras genom ekvationen $pH = -\lg[H^+]$, där $[H^+]$ är vätejonkoncentrationen (enhet mol/liter). Vad är vätejonkoncentrationen vid $pH = 5,6$?

(b) För en radioaktiv nuklid gäller att massan avtar enligt $m = Ce^{-0,0325t}$, där t är tiden i enheten dygn, C är massan då $t = 0$. Beräkna halveringstiden.

(c) Lös ekvationen $\ln(x-3) - \ln 3 = 2\ln 2 - \ln(x-7)$.

6 Bevisa genom att använda lämpliga additions- och subtraktionsformler att

$$\sin v \sin 5v = \frac{\cos 4v - \cos 6v}{2}$$

7 (a) Beräkna $\dfrac{(2+2i)^6}{(-\sqrt{3}+i)^6}$ och svara i så enkel form som möjligt.

(b) Ange ett fjärdegradspolynom som har *reella koefficienter* och nollställena $z = 4 - i$ och $z = i$.

Breakout 3

den 15 december 2020 09:23

Tentamen 2015 01 16