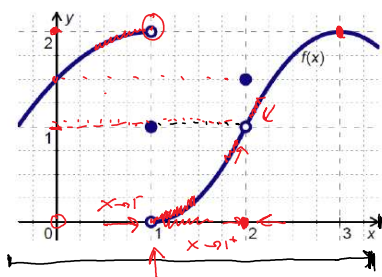


Genom att avläsa grafen, bestäm följande uttryck:

(2p)

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ,  
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , (d)  $f(1)$ ,  
 (e)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ,  
 (g)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , (h)  $f(2)$ .

(I uppgift 9 skall endast svar anges.)



$$D_f = [-\frac{1}{2}, 3.5]$$

$$V_f = (0, 2]$$

Lösning

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$

c) a) och b)  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existerar ej

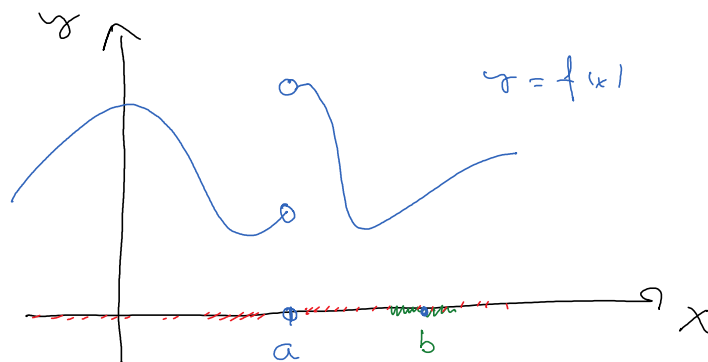
d)  $f(1) = 0$ , e)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ , f)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$

g) e) och f)  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ .

h)  $f(2) = \frac{3}{2}$

i)  $f(x)$  är ej kontinuerlig,  $x=2$  ty  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

Är följande funktion kontinuerlig?



kontinuitet är en lokal egenskap

$$D_f = (-\infty, a) \cup (a, b)$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b) \Leftrightarrow f \text{ är kontinuerlig i } x=b$$

$f(x)$  är en kontinuerlig funktion om den är kontinuerlig i varje punkt  $x \in D_f$

- Det gäller alltid att  $\arccos \cos x = x$  för alla reella  $x$ .
- Låt  $z$  vara ett komplext tal. Då är  $z - \bar{z}$  alltid ett reellt tal.
- Om  $f(x)$  är en kontinuerlig funktion definierad för alla reella tal så att  $f(1) = 1$  så existerar gränsvärdet för  $f(x)$  då  $x$  går mot 1.
- $f(x) = x^3$  är en inverterbar funktion.
- Om  $|z| = |w| \neq 0$  så är  $|\frac{z}{w}| = 1$ .
- Om  $\sin v = \sin w$  och  $\cos v = \cos w$  så är  $v = w$

Lösning

a)  $x = 2\pi$ ,  $\cos 2\pi = 1$   
 $\arccos(1) = 0$  ( $\cos 0 = 1$ )

Dvs  $\arccos(\cos 2\pi) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi$

Påståendet är falskt.

b) Påståendet är falskt

Tag  $z = i \Rightarrow \bar{z} = -i$  och  $z - \bar{z} = i - (-i) = 2i$

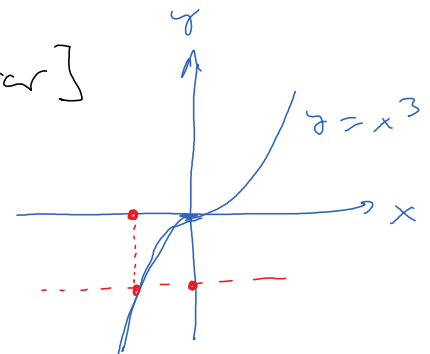
Dvs det finns tal  $z$  s.a.  $z - \bar{z}$  ej är reellt.

c) Påståendet är sant:

vet att  $f(x)$  är kontinuerlig,  $x = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$  [gränsvärdet existerar]

d)  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$  är inverterbar: Sant  
 $y = x^3$ ,  $x = \sqrt[3]{y}$



e)  $|z| = |w| \neq 0 \Rightarrow |\frac{z}{w}| = 1$  ?

Sant, +8

$|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|} = 1$

f)  $\sin v = \sin w$  &  $\cos v = \cos w \Rightarrow v = w$

Falskt påstående

Tag  $v = 0$  och  $w = 2\pi$ , då är

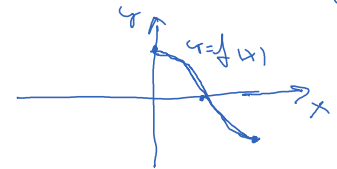
$\sin 0 = \sin 2\pi = 0$

$\cos 0 = \cos 2\pi = 1$

$f(f^{-1}(x)) = x$ ,  $x \in D_{f^{-1}}$   
 $f^{-1}(f(x)) = x$ ,  $x \in D_f$

$\arccos(x)$  är invers till

$f(x) = \cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$   
 $= D_f$



OBS

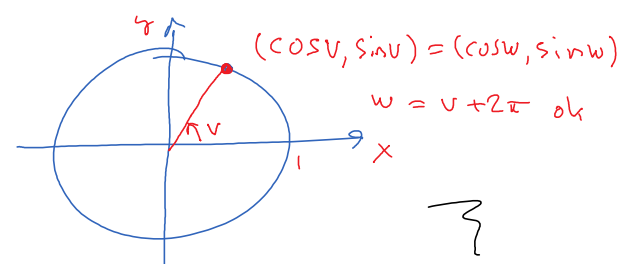
$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

$(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$

Absolutbelopp

$|z \cdot w| = |z| |w|$

$|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$  om  $|w| \neq 0$



För alla  $t \in \mathbb{R}$  gäller att  $\frac{3t^2 - t^4}{6} \leq \ln(2 - \cos t) \leq \frac{t^2}{2}$ .

Använd denna dubbelolikhet för att bestämma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos(2x))}{x^2}.$$

Lösning I olikheterna ovan

tar vi  $t = 2x$ .

1+2) ger (med  $t = 2x$ )

$$\frac{3(2x)^2 - (2x)^4}{6} \leq \ln(2 - \cos 2x) \leq \frac{(2x)^2}{2}$$

$$\frac{12x^2 - 16x^4}{6} \leq \ln(2 - \cos 2x) \leq \frac{4x^2}{2} = 2x^2$$

Vi delar nu med  $x^2$  i båda olikheterna:

$$VL = \frac{12x^2 - 16x^4}{6} / x^2 = \frac{12 - 16x^2}{6} = \frac{6 - 8x^2}{3}$$

$$HL = 2x^2 / x^2 = 2.$$

Dvs

$$\frac{6 - 8x^2}{3} \leq \underbrace{\frac{\ln(2 - \cos 2x)}{x^2}}_{= f(x)} \leq \underbrace{2}_{h(x)}$$

$$\text{Men } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - 8x^2}{3} = \frac{6 - 8 \cdot 0}{3} = 2$$

$$\text{och } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 2x)}{x^2} = 2$$

Sats: Instängningslag:

$$g(x) \leq \underbrace{f(x)}_{\rightarrow A} \leq \underbrace{h(x)}_{\rightarrow A}$$

$$\& \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$$

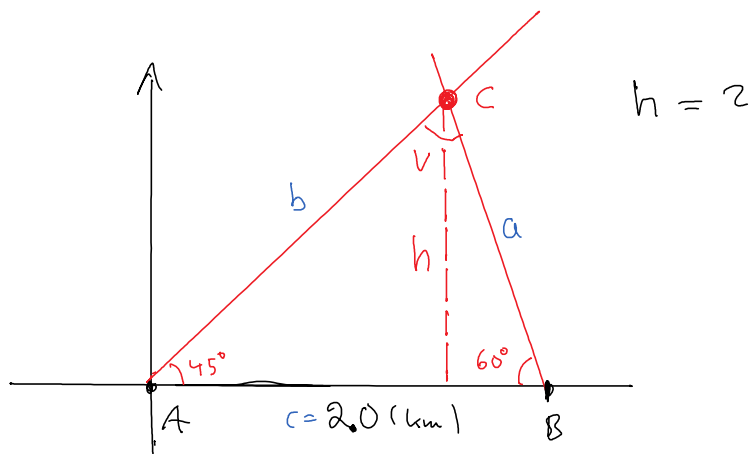
Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

# Övningstentamen 1 - uppgift 5

den 17 december 2020 14:30

Två personer A och B befinner sig 2,0 km från varandra. Marken mellan dem är horisontell. En ballong C befinner sig i luften rakt ovanför sträckan AB (mellan observatörerna). A ser ballongen i en riktning som bildar vinkeln  $45^\circ$  mot linjen AB, medan motsvarande vinkel sett från B är  $60^\circ$  (alltså vinklar i triangeln ABC). På vilken höjd är ballongen?



Sinussatsen:  $\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin V}$ , V: har  $45^\circ + 60^\circ + V = 180^\circ$   
 $V = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$

Måste beräkna  $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ$   
 $\approx 0.97$   
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Dvs  $b = \sin 60^\circ \cdot \frac{2}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$  [Alternativ:  $b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sin 75^\circ} \approx 1.793$ ]

Till sist  $\frac{h}{b} = \sin 45^\circ$ ,  $h = b \cdot \sin 45^\circ = \frac{2\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$   
 $\frac{2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2 \cdot 3 - 2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{6-2\sqrt{3}}{2}$   
 $= \underline{\underline{3-\sqrt{3}}} \approx 1.3$

Svar: Ballongen befinner sig på höjden 1.3 km

Alt. forts:  
 $h = b \cdot \sin 45^\circ = \frac{b}{\sqrt{2}}$   
 $\approx 1.268$   
 $\approx \underline{\underline{1.3}}$

Bevisa genom att använda lämpliga additions- och subtraktionsformler att

$$\sin v \sin 5v = \frac{\cos 4v - \cos 6v}{2}$$

$$\begin{cases} \cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \cdot \sin v \\ \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \cdot \sin v \end{cases}$$

Lösning

$$\cos 4v = \cos(5v - v) = \cos 5v \cdot \cos v + \sin 5v \cdot \sin v$$

$$\cos 6v = \cos(5v + v) = \cos 5v \cdot \cos v - \sin 5v \cdot \sin v$$

$$\cos 4v - \cos 6v = 0 + 2 \sin 5v \cdot \sin v$$

Subtrahera  
 $V_{L1} - V_{L2} =$   
 $= H_{L1} - H_{L2}$

∴  $\sin v \cdot \sin 5v = \frac{1}{2} (\cos 4v - \cos 6v)$  v.s.B.

Polynomet  $p(z) = z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 4z + 20$  har nollställena  $z = 2 - i$  och  $z = 2i$ . Faktoriser polynomet i reella faktorer.

Lösning:

$p(z)$  har reella koefficienter och  $2-i$  och  $2i$  är nollställen  
 $\Rightarrow$  (en sats) att även  $\overline{2-i} = 2+i$  och  $\overline{2i} = -2i$  är nollställen

Med  $\alpha = 2-i$ ,  $\beta = 2i$  så gäller att

$$\begin{aligned} & \underbrace{(z-\alpha) \cdot (z-\bar{\alpha})}_{*} \text{ och } \underbrace{(z-\beta)(z-\bar{\beta})}_{*} \text{ är faktorer i } p(z) \\ & \stackrel{*}{=} z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2 \quad \stackrel{*}{=} z^2 - 2\operatorname{Re}(\beta)z + |\beta|^2 \\ & = z^2 - 2 \cdot 2 \cdot z + (2^2 + 1^2) \quad = z^2 + 2 \cdot 0 \cdot z + (0^2 + 2^2) \\ & = z^2 - 4z + 5 \quad = z^2 + 4 \end{aligned}$$

Dvs

$$p(z) = z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 4z + 20 = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4)(z - a)$$

där  $z-a$  är den återstående reella faktorn.

Men den konstanta termen i VL är 20 och måste vara lika med produkten av de konstanta termerna i faktorerna, HL

Alltså är

$$20 = 5 \cdot 4 \cdot (-a) = -20a \iff \underline{a = -1}$$

Alternativ: Man kan leta efter heltalsrötter  $a$ ;

v. vet att  $a \mid 20$

Alternativ: Multiplicera ihop faktorerna  $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20$

Gör sedan en polynomdivision

$$\begin{array}{r|l} z+1 & z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 4z + 20 \quad (\text{kvot}) \quad (\text{återstående faktor}) \\ \hline z^5 - 4z^4 + 9z^3 - 16z^2 + 20z & \\ \hline - (z^5 - 4z^4 + 9z^3 - 16z^2 + 20z) & \\ \hline z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 & \\ - (z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20) & \\ \hline 0 & (\text{rest}) \end{array}$$

Svar:  $p(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4)(z - 1)$

Faktorisering av  $p(z)$  i reella faktorer av så låg grad som möjligt.