

Övningstentamen 1, MVE640, del B

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**
Motivera och förklara så väl du kan

1. Denna uppgift består i ett antal påståenden. Avgör för varje påstående om det är sant eller falskt och motivera varför.

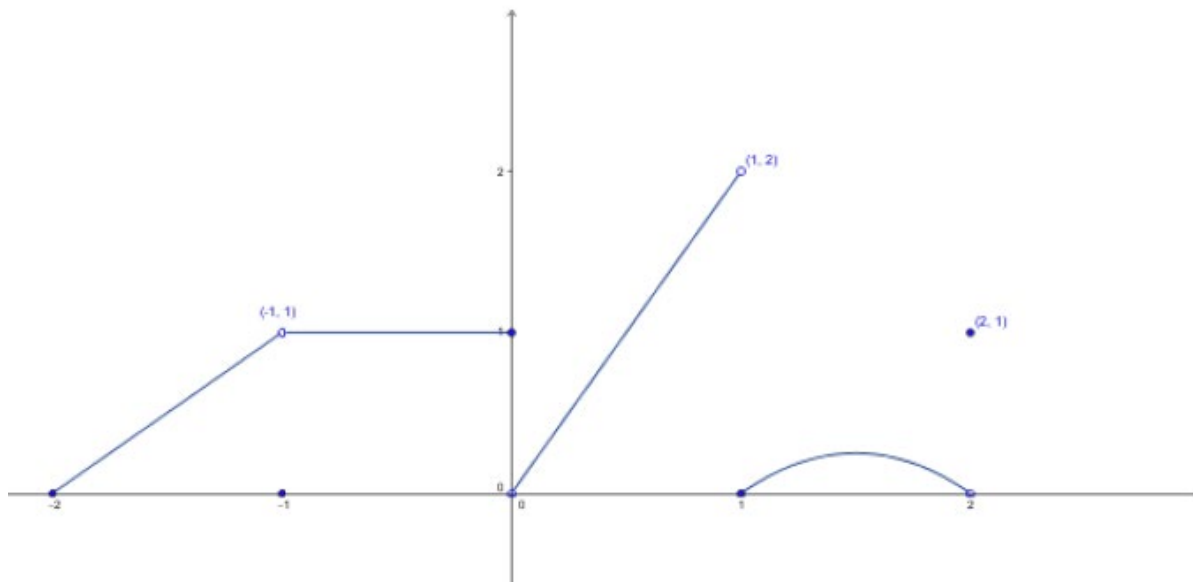
Rätt svar med motivering ger 1p och ett svar utan motivering ger 0p. (6p)

- a) Det gäller alltid att $\arccos \cos x = x$ för alla reella x .
- b) Låt z vara ett komplext tal. Då är $z - \bar{z}$ alltid ett reellt tal.
- c) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion definierad för alla reella tal så att $f(1) = 1$ så existerar gränsvärdet för $f(x)$ då x går mot 1.
- d) $f(x) = x^3$ är en inverterbar funktion.
- e) Om $|z| = |w| \neq 0$ så är $|\frac{z}{w}| = 1$.
- f) Om $\sin v = \sin w$ och $\cos v = \cos w$ så är $v = w$

2. (2+2p)

- (a) Lös ekvationen $\ln x^3 + 1 = \ln x^2$.
- (b) En bakterietillväxt utvecklas enligt sambandet $y(t) = 1000e^{0,64t}$, där $y(t)$ är antalet bakterier vid tiden t timmar. Efter hur lång tid har antalet bakterier tiofaldigats?

3. Funktionen $f(x)$ är definierad på $[-2, 2]$ och har grafen nedan. (5p)
Avgör om $f(x)$ är kontinuerlig, vänsterkontinuerlig, högerkontinuerlig och diskontinuerlig i var och en av punkterna $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1$ och $x = 2$. (Motivera ditt svar)



4. (2+3p)

(a) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$.

(b) Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 5x + a}{x^2 - 3x - 4}$ existerar och bestäm sedan gränsvärdet.

5. (5p)

Två personer A och B befinner sig 2,0 km från varandra. Marken mellan dem är horisontell. En ballong C befinner sig i luften rakt ovanför sträckan AB (mellan observatörerna). A ser ballongen i en riktning som bildar vinkeln 45° mot linjen AB , medan motsvarande vinkel sett från B är 60° (alltså vinklar i triangeln ABC). På vilken höjd är ballongen?

6. (5p)

Bevisa genom att använda lämpliga additions- och subtraktionsformler att

$$\sin v \sin 5v = \frac{\cos 4v - \cos 6v}{2}$$

7. (5p)

För alla $t \in \mathbb{R}$ gäller att $\frac{3t^2 - t^4}{6} \leq \ln(2 - \cos t) \leq \frac{t^2}{2}$.

Använd denna dubbelolikhet för att bestämma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos(2x))}{x^2}.$$

8. Polynomet $p(z) = z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 4z + 20$ har nollställena $z = 2 - i$ och $z = 2i$. Faktorisera polynomet i reella faktorer. (5p)