

Övningstentamen 1 - Lösningar

1. 2017-02-17: 1

SVAR: F,F,S,S,F

a. Motexempel:

Tag $x=2\pi$ då är $\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0$

(den vinkel i intervallet $[0, \pi]$ för vilken cosinus är 1)

b. Motexempel: Tag $z = i$, då är $z - \bar{z} = i - (-i) = 2i$ som ej är reellt.

c. Om $f(x)$ är kontinuerlig i $x=1$ så existerar gränsvärdet och $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$

d. $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$, dvs $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

e. $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{|w|}{|w|} = 1$

f. Motexempel: Tag $v = 0$ och $w = 2\pi$,

2. 2015-08-26:1

(a) Logaritmlag nr 3 ger

$$3 \ln x + 1 = 2 \ln x \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1}$$

(b) Vi löser ekvationen

$$10000 = 1000e^{0,64t}$$

och får då

$$e^{0,64t} = 10 \iff 0,64t = \ln 10 \iff t = \frac{\ln 10}{0,64} \approx 3,6$$

Tiden är alltså cirka 3,6 timmar.

3. 2016-08-24: 4

Lösning:

Vi betraktar var punkt för sig

$x = -2$: Här är $f(x)$ högerkontinuerlig i pkt $(-2, 0)$ eftersom vi i grafen ser att $y \rightarrow 0$ då $x \rightarrow$, dvs $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0 = f(-2)$. Eftersom $x = -2$ är en sluten ändpkt till D_f är $f(x)$ också kontinuerlig i $x = -2$.

$x = -1$: Här gör grafen ett "språng", dvs $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \neq f(-1) = 0 \implies f(x)$ diskontinuerlig i $x = -1$.

$x = 0$: Här har vi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = f(0) \implies f(x)$ är vänsterkontinuerlig i $x = 0$, men $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) \implies f(x)$ är inte högerkontinuerlig i $x = 0$ och då inte heller kontinuerlig, dvs diskontinuerlig.

$x = 1$: Här har vi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq f(1) = 0 \implies f(x)$ är inte vänsterkontinuerlig i $x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 = f(1) \implies f(x)$ är högerkontinuerlig i $x = 1$. Eftersom vänstergränsvärdet $\neq$ högergränsvärdet så är $f(x)$ även diskontinuerlig i $x = 1$.

$x = 2$: Återigen sluten ändpkt i D_f . Denna gång endast intressant att betrakta vänstergränsvärdet, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \neq f(2) = 1 \implies f(x)$ är inte vänsterkontinuerlig i $x = 2$, och då även diskontinuerlig.

4. 2015-01-16: 4

(a) Konjugatförlängning ger

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(x-3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{då } x \rightarrow 1$$

Svar: $\frac{1}{4}$

(b) Eftersom $x^2 - 3x - 4 \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 4$, så är enda chansen till gränsvärde att även täljaren har nollstället 4. Detta ger oss konstanten a : $4^2 + 5 \cdot 4 + a = 0 \Rightarrow a = -36$. Båda polynomen har nu nollstället 4 och har därmed enligt faktorsatsen faktorn $x - 4$. Faktoruppdelar:

$$\frac{x^2 + 5x - 36}{x^2 - 3x - 4} = \frac{(x-4)(x+9)}{(x-4)(x+1)} = \frac{x+9}{x+1} \rightarrow \frac{13}{5} \quad \text{då } x \rightarrow 4$$

Svar: $\frac{13}{5}$

5. 2015-01-16: 3 (Se också lösning i "Demo 14")

Vi har en triangel med vinklarna $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$ och $C = 180 - A - B = 75^\circ$ (vid ballongen). Med små bokstäver för motstående sidor har vi då med sinussatsen:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

Om D är punkten rakt under C på sträckan AB , så är vinkeln ADC rät, så höjden blir

$$CD = b \sin A = \frac{c \sin B \sin A}{\sin C} = \frac{2,0 \sin 60^\circ \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 1,27$$

Svar: **1,3 km** (exakt $3 - \sqrt{3}$, men det krävdes ej).|

2015-02-13: 7

I vänsterledet står det $\sin v \sin 5v$, som vi kan känna igen från subtraktions- och additionsformlerna för cosinus:

$$\cos(5v - v) = \cos 5v \cos v + \sin 5v \sin v$$

$$\cos(5v + v) = \cos 5v \cos v - \sin 5v \sin v$$

Om vi subtraherar dessa ekvationer ledvis, får vi

$$\cos 4v - \cos 6v = 2 \sin 5v \sin v$$

dvs

$$\sin v \sin 5v = \frac{\cos 4v - \cos 6v}{2}$$

VS

6. 2019-01-18: 8

Uppgift 8. Sätter man $t = 2x$ i den givna dubbelolikheten, så får man att

$$\frac{12x^2 - 16x^4}{6} \leq \ln(2 - \cos(2x)) \leq \frac{4x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - \frac{8x^4}{3} \leq \ln(2 - \cos(2x)) \leq 2x^2.$$

När man dividerat alla leden med x^2 (som är positivt då $x \neq 0$), så fås att

$$\frac{2x^2}{x^2} - \frac{8x^4}{3x^2} \leq \frac{\ln(2 - \cos(2x))}{x^2} \leq \frac{2x^2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{2 - \frac{8x^2}{3}}_{\rightarrow 2-0=2} \leq \frac{\ln(2 - \cos(2x))}{x^2} \leq \underbrace{2}_{\rightarrow 2}.$$

Eftersom uttrycket $\ln(2 - \cos(2x))/x^2$ är instängt mellan två funktioner som har samma gränsvärde då $x \rightarrow 0$, ger instängningsregeln att det sökta gränsvärdet existerar och är lika med det gemensamma värdet. Således

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos(2x))}{x^2} = 2.$$

7. Se Demo 14: Flera vägar till en lösning ges varav det tredje är mer "rakt på"

Lösning:

$p(z)$ har reella koefficienter och $2-i$ och $2i$ är nollställen
 $\Rightarrow$ (en sats) att även $\overline{2-i} = 2+i$ och $\overline{2i} = -2i$ är nollställen

Med $\alpha = 2-i$, $\beta = 2i$ så gäller att

$$\begin{aligned} \underline{(z-\alpha) \cdot (z-\bar{\alpha})} \text{ och } \underline{(z-\beta)(z-\bar{\beta})} & \text{ är faktorer i } p(z) \\ \stackrel{*}{=} z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2 & \stackrel{*}{=} z^2 - 2\operatorname{Re}(\beta)z + |\beta|^2 \\ = z^2 - 2 \cdot 2z + (2^2 + 1^2) & = z^2 - 2 \cdot 0z + (0^2 + 2^2) \\ = z^2 - 4z + 5 & = z^2 + 4 \end{aligned}$$

Dvs

$$p(z) = z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 4z + 20 = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4)(z - a)$$

där $z-a$ är den återstående reella faktorn.

Men den konstanta termen i VL är 20 och måste vara lika med produkten av de konstanta termerna, faktorerna, HL

Alltså är $20 = 5 \cdot 4 \cdot (-a) = -20a \iff \underline{a = -1}$

Alternativ: Man kan leta efter heltalsrötter a ;
 v. vet att $a \mid 20$

Alternativ: Multiplicera ihop faktorerna $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20$
 Genomför sedan en polynomdivision

$$\begin{array}{r|l} z+1 & z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 4z + 20 \\ \hline & z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 4z + 20 \\ & - (z^5 - 4z^4 + 9z^3 - 16z^2 + 20z) \\ \hline & z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 \\ & - (z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20) \\ \hline & 0 \text{ (rest)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(kvot)} \\ \text{(återstående faktor)} \end{array}$$

Svar: $p(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4)(z - 1)$

Faktorisering av $p(z)$ i reella faktorer av så låg grad som möjligt.