

Övningstentamen 2 – Lösningar

1. 2017-08-23: 1

SVAR: a) Falskt (2π och 0 ger samma VL)

b) Sant

c) Sant

d) Falskt, ej definierad för t.ex. $x = -2$

e) Falskt, vi kan exempelvis öka V med 2π för att få fler möjligheter f) Falskt, har ej lösning då $k = 2$ exempelvis

2. 2018-01-12: 7

Uppgift 7. (a) Om man försöker sätta in $x = 1$, så får man ett obestämt uttryck " $\frac{0}{0}$ ". Bråket behöver alltså förenklas, t.ex. genom att förlänga det med konjugaten:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{4x} - \sqrt{2x+2}} & \cdot \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}} \\ &= \frac{(3x+1) - (x+3)}{(4x) - (2x+2)} \cdot \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} = \frac{2x-2}{2x-2} \cdot \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} \\ &= \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} \end{aligned}$$

Nu har hela bråket blivit kontinuerligt och så kan man räkna ut

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{4x} - \sqrt{2x+2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 1} + \sqrt{2 \cdot 1 + 2}}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1} + \sqrt{1 + 3}} = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{4}}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = 1.$$

Svar: 1.

(b) Man bryter ut de dominerande potenserna av x . Observera dock att x är negativt, vilket innebär att $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{(x+2)^2 - (x-1)^2} &= \frac{\sqrt{9x^2+2}}{(x^2+4x+4) - (x^2-2x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{9x^2+2}}{6x+3} = \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{x \cdot (6+\frac{3}{x})} = \frac{-x \cdot \sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{x \cdot (6+\frac{3}{x})} = -\frac{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{(6+\frac{3}{x})}. \end{aligned}$$

Därför blir

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{(x+2)^2 - (x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{(6+\frac{3}{x})} = -\frac{\sqrt{9+0}}{6+0} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Svar: $-\frac{1}{2}$.

3. Svar:

- a. $V_f = (-3, 2]$ och $D_f = [-3, 1) \cup (1, 2]$
- b. $x = -1$: Vänstergränsvärdet är 0, Högergränsvärdet är -3
 $x = 1$: Vänstergränsvärdet är -1, Högergränsvärdet är -1
 $f(x)$ är inte kontinuerlig i dessa punkter
- c. $f(x)$ är inverterbar och $f^{-1}(0) = 2$ eftersom $f(2) = 0$

4. 2018-08-29: 3, 5

Uppgift 4a

Indirekt bevis: Skulle triangeln vara rätvinklig, så vore sidorna a och b dess kateter (ty $a \leq b \leq c$) och så blev arean $T = \frac{1}{2}ab$, vilket dock strede mot förutsättningen att $T < \frac{1}{2}ab$. Triangeln kan alltså inte vara rätvinklig.

Direkt bevis: Eftersom $a \leq b \leq c$, så gäller det att

$$T < \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2}ac \leq \frac{1}{2}bc$$

Enligt areasatsen är $T = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ och så $\sin \gamma < 1$, $\sin \beta < 1$ och $\sin \alpha < 1$. Således $\gamma \neq 90^\circ$, $\beta \neq 90^\circ$ och $\alpha \neq 90^\circ$.

Uppgift 4b Summan av triangelns vinklar är 180° , så $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$. Sidorna a och b kan bestämmas m.h.a. sinussatsen, vilket kräver att man först beräknar $\sin \gamma$ m.h.a. additionsformeln.

$$\sin \gamma = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Sinussatsen ger

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 5 \cdot \frac{1/2}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4} = \frac{10}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2} \text{ cm.}$$

Sinussatsen används en gång till och då ger den att

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4} = \frac{10}{\sqrt{3} + 1} = \frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{ cm.}$$

Svar: $\gamma = 105^\circ$, $a = 2,5(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm}$ och $b = 2,5(\sqrt{3} - 1) \text{ cm}$.

5. 2017-08-23: 5

Lösning: Sätt in $z = 3$ i polynomet och sätt lika med noll. Vi får då en ekvation där vi kan bestämma a till 1. Efter division med $z-3$ så erhåller vi polynomet $z^2 - z + 1 - i$.

Övriga nollställena ges nu av rötterna till $z^2 - z + 1 - i = 0$.

Andragradsekvationen löser vi på vanligt sätt (med kvadratkomplettering mm.) och får då rötterna $z = -i$ och $z = 1 + i$.

6. 2015-01016: 6

- (a) Skriv täljare och nämnare i polär form. Vi har då (rita komplext talplan!) att $2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ och $-\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Våra exponentiella räknelagar kan nu användas:

$$\frac{(2+2i)^6}{(-\sqrt{3}+i)^6} = \frac{(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^6}{(2e^{i\frac{5\pi}{6}})^6} = \frac{2^6 2^3 e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^6 e^{i5\pi}} = \frac{8(-i)}{-1} = 8i$$

Svar: **8i**

- (b) Om koefficienterna är reella, så vet vi att konjugaten till de givna nollställena också är nollställena. Av faktorsatsen vet vi också att $z - (4-i)$, $z - (4+i)$, $z - i$ och $z + i$ är faktorer i polynomet. Det enklaste fjärdegradspolynomet är då produkten av dessa faktorer:

$$p(z) = ((z-4)+i)((z-4)-i)(z-i)(z+i) = ((z-4)^2+1)(z^2+1) = (z^2-8z+17)(z^2+1) =$$

$$\text{Svar: } z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 8z + 17$$

7. 2018-02-17: 10

Den givna funktionen är en väl-definierad kvot av en trigonometrisk funktion och ett polynom då $x < 0$, vilket innebär att den är kontinuerlig i intervallet $(-\infty, 0)$. Den givna funktionen är ett polynom då $0 \leq x \leq 2$, vilket innebär att den är kontinuerlig i det öppna intervallet $(0, 2)$. Den givna funktionen är en väl-definierad rationell funktion då $x > 2$, vilket innebär att den är kontinuerlig i intervallet $(2, \infty)$. De enda problematiska ställena, som behöver undersökas, är alltså $x = 0$ och $x = 2$.

För att f blir kontinuerlig i punkten $x = 0$, så krävs det att $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Eftersom f definieras med olika formler till vänster och till höger om 0, så innebär detta att de ensidiga gränsvärdena vid $x = 0$ behöver undersökas och $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ krävs.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 6x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin 6x}{6x} = \left/ \begin{matrix} z = 6x \\ z \rightarrow 0^- \end{matrix} \right/ = 3 \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\sin z}{z} = 3 \cdot 1 = 3,$$

$$f(0) = 0a + b = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = a \cdot 0 + b = b.$$

Det krävs alltså att $3 = b$.

För att f blir kontinuerlig i punkten $x = 2$, så krävs det att $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. Eftersom f definieras med olika formler till vänster och till höger om 2, så innebär detta att de ensidiga gränsvärdena vid $x = 2$ behöver undersökas och $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ krävs.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + 3) = 2a + 3,$$

$$f(2) = 2a + b = 2a + 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Det krävs alltså att $2a + 3 = 1$, vilket ger att $a = -1$.

Svar: $a = -1$ och $b = 3$.

8. 2017-08-23: 8*