

Uppgift 1

den 13 januari 2021 09:58

1. Denna uppgift består i ett antal påståenden.

Avgör för varje påstående om det är sant eller falskt och motivera varför.

Rätt svar med motivering ger 1p och ett svar utan motivering ger 0p.

- Det gäller alltid att $\arcsin \sin x = x$ för alla x där båda sidorna är definierade.
- Låt z vara ett komplext tal. Då är $z + \bar{z}$ alltid ett reellt tal.
- Om $f(x)$ och $g(x)$ båda är kontinuerliga funktioner så är $f(x) \cdot g(x)$ en kontinuerlig funktion.
- Funktionen $\sqrt{2x+3}$ är definierad för alla reella x .
- Om $re^{iv} = Re^{iV}$ där r, R, v, V är positiva reella tal så är $v = V$.
- Ekvationen $\sin v = k$ har alltid (minst) en lösning $v \in \mathbb{R}$ för alla $k \in \mathbb{R}$.

a)

$$\begin{cases} x = 0, \sin 0 = 0 \\ \arcsin(\sin 0) = \arcsin 0 = 0 \\ x = 2\pi, \sin 2\pi = 0 \\ \arcsin(\sin 2\pi) = \arcsin 0 = 0 \end{cases}$$

Dvs $\arcsin(\sin 2\pi) \neq 2\pi$

Påståendet är falskt

b)

$$\begin{cases} z = x + iy, \bar{z} = x - iy \\ z + \bar{z} = 2x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

c) Sant: känd sats!

d)

$$x = -2 \Rightarrow 2x + 3 = 2 \cdot (-2) + 3 = -1, \sqrt{2x+3} \text{ är inte definierad för } x = -2$$

e)

$$re^{iv} = Re^{iV} \Rightarrow r = R, v = V + k \cdot 2\pi, k \text{ heltal}$$

Tag $r = R = 1, v = 0, V = 2\pi$ då är

$$VL = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1 \cdot e^0 = 1$$

$$HL = 1 \cdot e^{i \cdot 2\pi} = (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1 + 0 \cdot i = 1$$

$$\begin{cases} re^{iv} = Re^{iV} \\ \text{men } v \neq V \end{cases}$$

Påståendet är falskt

f)

$$\sin v \text{ tar endast värden mellan } -1 \text{ och } 1$$

Alltså saknas t ex $\sin v = 2$ lösningar.

Påståendet är falskt

den 23 januari 2021 09:59

Räkna ut följande gränsvärden:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{4x} - \sqrt{2x+2}},$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2}}{(x+2)^2 - (x-1)^2},$

G) Nennwerte : $x=1$, $\sqrt{4x} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{4} - \sqrt{2+2} = 2-2=0$

701: one $x = 1 \quad \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} = \sqrt{4} - \sqrt{4} = 0$

Gränsvärde av typen $\frac{0}{0}$

$$= \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{4x} - \sqrt{2x+2}} \cdot \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}} \cdot \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} =$$

$$= \frac{3x+1 - (x+3)}{4x - (2x+2)} \cdot \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} = \frac{2x-2}{2x-2} \cdot \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}}$$

$$= 1 \cdot \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}}$$

Dvs $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{4x} - \sqrt{2x+2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 1} + \sqrt{2 \cdot 1 + 2}}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1} + \sqrt{1 + 3}} = \frac{2 + 2}{2 + 2} = 1$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{(x+2)^2 - (x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{6x+3}$$

$$\begin{array}{r} (x+2) = x + 4x + 4 \\ (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\ \hline - = 6x + 3 \end{array} \quad 2$$

11. [Byt ut höstagrader och i nämnaren]

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} \sqrt{9x^2 + 2}}{6 + 3/x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2(9 + 2/x^2)}}{6 + 3/x} = \left[\sqrt{x^2} = -x \text{ on } x < 0 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-x}{x} \sqrt{9 + 2/x^2}}{6 + 3/x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + 2/x^2}}{6 + 3/x} = \left[\begin{array}{l} \frac{2}{x^2} \rightarrow 0 \\ \frac{3}{x} \rightarrow 0 \end{array} \right] \left\{ \text{d.h. } x \rightarrow -\infty \right\}$$

$$= \frac{-\sqrt{9+0}}{6+0} = \frac{-3}{6} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{|x|}{x} = -1 \text{ for } x < 0$$

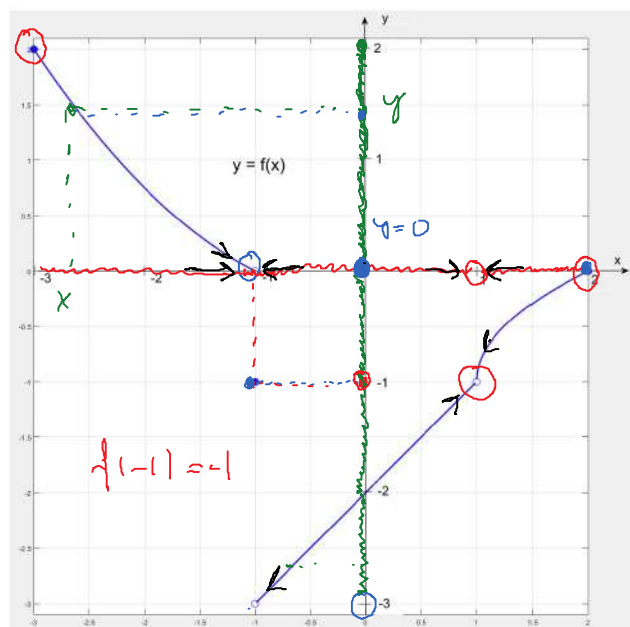
Uppgift 3

den 13 januari 2021 10:00

I grafen nedan beskrivs en funktion $y = f(x)$. Bestäm eller avgör följande

(5 p)

- Ange definitionsmängd och värdemängd
- Beräkna höger och vänstergränsvärden i $x = -1$ och $x = 1$. Är $f(x)$ kontinuerlig i dessa punkter?
- Avgör om $f(x)$ är inverterbar, i sådana fall vad är $f^{-1}(0)$?



$$a) D_f = [-3, 1) \cup (1, 2]$$

$$V_f = [-3, 2]$$

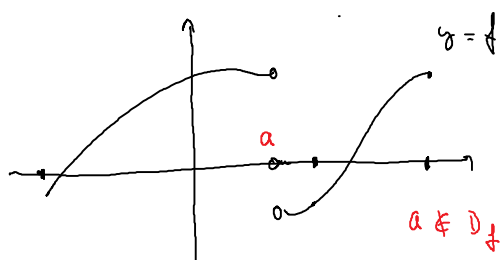
$$b) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$$

$1 \notin D_f$ f är ej kontinuerlig i $x = 1$
ej heller i $x = -1$ eftersom
höger och vänstergränsvärden inte är lika

- c) f är inverterbar t.s. för varje $y \in V_f$ finns precis ett $x \in D_f$ s.a. $f(x) = y$
 $f^{-1}(0)$ är det x -värde i grafen för vilket $f(x)$ är 0:
 $f^{-1}(0) = 2$ t.s. $f(2) = 0$.

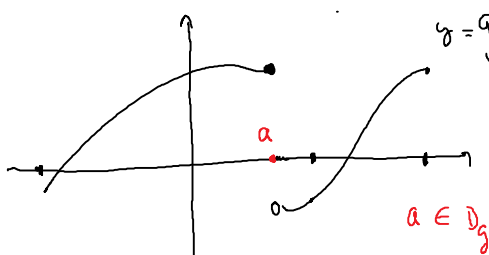
Kommentar:



$y = f(x)$ är kontinuerlig

I varje punkt $x \in D_f$ är $f(x)$ kontinuerlig

$a \notin D_f$



$y = g(x)$ är ej kontinuerlig

I punkten $a \in D_g$ är $g(x)$ diskontinuerlig

(i övriga punkter $x \in D_g$ är $g(x)$ kontinuerlig)
 $x \neq a$

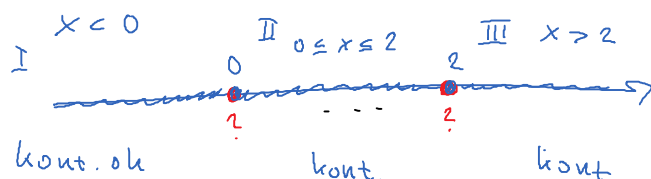
Uppgift 7

den 13 januari 2021 10:04

7.

Bestäm de reella talen a och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x}{2x} & \text{då } x < 0, \\ ax + b & \text{då } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{då } x > 2 \end{cases}$$



blir kontinuerlig.

Undersöker höger och vänstergränsvärden i $x = 0$ och $x = 2$.

$$\begin{aligned} x=0: \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 6x}{2x} = \left[\begin{array}{l} t=6x \rightarrow 0^- \\ \text{då } x \rightarrow 0^- \\ x=t/6 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin t}{2 \cdot t/6} = \lim_{t \rightarrow 0^-} 3 \cdot \frac{\sin t}{t} \xrightarrow{1} 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = a \cdot 0 + b = b$$

$f(x)$ är kontinuerlig i $x = 0$ om. u. $3 = b$

$x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax + 3 = a \cdot 2 + 3 = 2a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) \\ x^2 - 3x + 2|_{x=2} = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0 \end{array} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 2-1 = 1$$

$f(x)$ är kontinuerlig i $x = 2$ om. u. $2a + 3 = 1$, $2a = -2$, $a = -1$

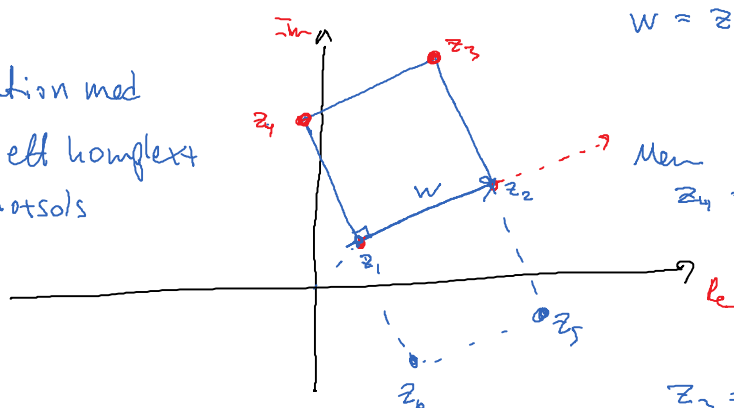
Svar: $a = -1$ och $b = 3$.

Uppgift 8

den 13 januari 2021 10:04

8. I det komplexa talplanet ligger en kvadrat inskriven där två av hörnen på en sida ligger i punkterna $1+i$ och $3+2i$. Bestäm punkterna för de övriga två hörnen. (Två fall). Rita figur.

Multiplikation med i roterar ett komplext tal 90° moturs



$$W = z_2 - z_1 = 3 + 2i - (1 + i) = 2 + i$$

Men $z_4 = z_1 + i \cdot W = 1 + i + i(2 + i) = 1 + i + 2i - 1 = 3i$

$$z_3 = z_2 + iW = 3 + 2i + 2i - 1 = 2 + 4i$$

$$z_6 = z_1 - iW = 1 + i - (2i - 1) = 2 - i$$

$$z_5 = z_2 - i \cdot W = 3 + 2i - (2i - 1) = 4$$

Polar form

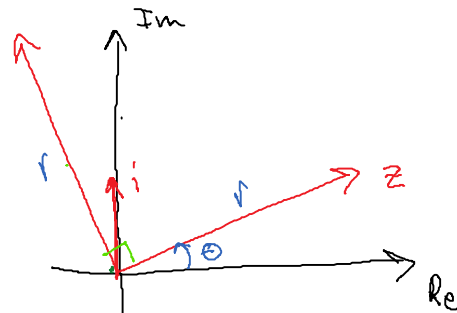
$$z = r e^{i\theta}$$

$$w = \rho \cdot e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} z \cdot w = r \cdot \rho \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \rho \cdot e^{i(\theta + \varphi)} \\ z \cdot i = r \cdot 1 \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\pi/2} = r \cdot e^{i(\theta + \pi/2)} \end{cases}$$

$$w = i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$$

↑
argumentet



Ekvationen $z^4 - 4z^3 - z^2 + 24z - 30 = 0$

har en rot med imaginärdelen 1.

Lös ekvationen.

$z = a + i$ är en rot

för ngt reellt tal a

Ekv. har reella koefficienter

$\Rightarrow z = a - i$ är också en rot

1. Vi kan stoppa in $a + i$ i ekvationen ovan och så får vi nya ekvationer i den obekanta a (två ekvationer)

$$2. (z - (a + i))(z - (a - i)) = \underbrace{z^2 - 2az + a^2 + 1}_{z^2 - 4z + 5} \quad \text{där } p(z) = z^4 - 4z^3 - z^2 + 24z - 30$$

Lösning: Modell 2.

$$\begin{array}{r} z^2 - 2az + a^2 + 1 \overline{) z^4 - 4z^3 - z^2 + 24z - 30} \\ - (z^4 - 2az^3 + (a^2 + 1)z^2) \quad \text{kvot} \\ \hline (2a - 4)z^3 - (a^2 + 2)z^2 + 24z - 30 \\ - [(2a - 4)z^3 - 2a(2a - 4)z^2 + (a^2 + 1)(2a - 4)z] \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2a(2a - 4) - a^2 - 2 &= 4a^2 - 8a - a^2 - 2 \\ &= 3a^2 - 8a - 2 \\ 24 - (a^2 + 1)(2a - 4) &= 24 - (2a^3 - 4a^2 + 2a - 4) \\ &= -2a^3 + 4a^2 - 2a + 28 = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(2a(2a - 4) - (a^2 + 2))z^2 + (24 - (a^2 + 1)(2a - 4))z - 30 \quad (= (3a^2 - 8a - 2)z^2 + bz - 30) \\ &= (3a^2 - 8a - 2)z^2 - 2a(3a^2 - 8a - 2)z + (a^2 + 1)(3a^2 - 8a - 2) \\ &\hline (b + 2a(3a^2 - 8a - 2))z - (a^2 + 1)(3a^2 - 8a - 2) - 30 = \text{Rest} = 0 \\ &\quad \quad \quad = 0! \quad \quad \quad = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b + 2a(3a^2 - 8a - 2) &= -2a^3 + 4a^2 - 2a + 28 + 6a^3 - 16a^2 - 4a \\ &= 4a^3 - 12a^2 - 6a + 28 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 - 6a^2 - 3a + 14 = 0$$

Vi undersöker om det finns heltalsrötter.

En sådan delas konstanta koefficienter 14: dvs $a = \pm 1, \pm 2, \pm 7$

Efter granskning finner vi att $a = 2$ är en rot.

$$\underline{a = 2}; \quad 2 \cdot 8 - 6 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 14 = \underline{16 - 24 - 6 + 14 = 0}$$

Undersök om konstanta termer i resttermen är noll med $a=2$

$$-(a+1)(3a^2-8a-2)-30|_{a=2} = -5(\underbrace{12-16-2}_{=-6})-30 = 30-30 = 0.$$

Sätt nu in $a=2$ i kvoten

$$z^2 + (2a-4)z + (3a^2-8a-2) = z^2 + 0 \cdot z + (12-16-2) = z^2 - 6$$

Övriga rötter för vi ur ekvationen
$$\begin{aligned} z^2 - 6 &= 0 \\ z &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

Svar: Rötterna är $2+i$, $2-i$, $\sqrt{6}$ och $-\sqrt{6}$