

Agenda

den 5 november 2020 08:11

- Exponentialfunktioner

- Logaritmer

$$y = e^x, a^x, 10^x$$

$$y = \ln x, {}^a\log x, \lg x$$

$${}_a\log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$e^{\ln x} = x, {}^a\log x = x, 10^{\lg x} = x$$

$$\ln e^x = x, {}^a\log a^x = x, \lg 10^x = x$$

$$D_{\log} = (0, \infty), V_{\log} = \mathbb{R}$$

$$D_{\exp} = \mathbb{R}, V_{\exp} = (0, \infty)$$

Räkneregler:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

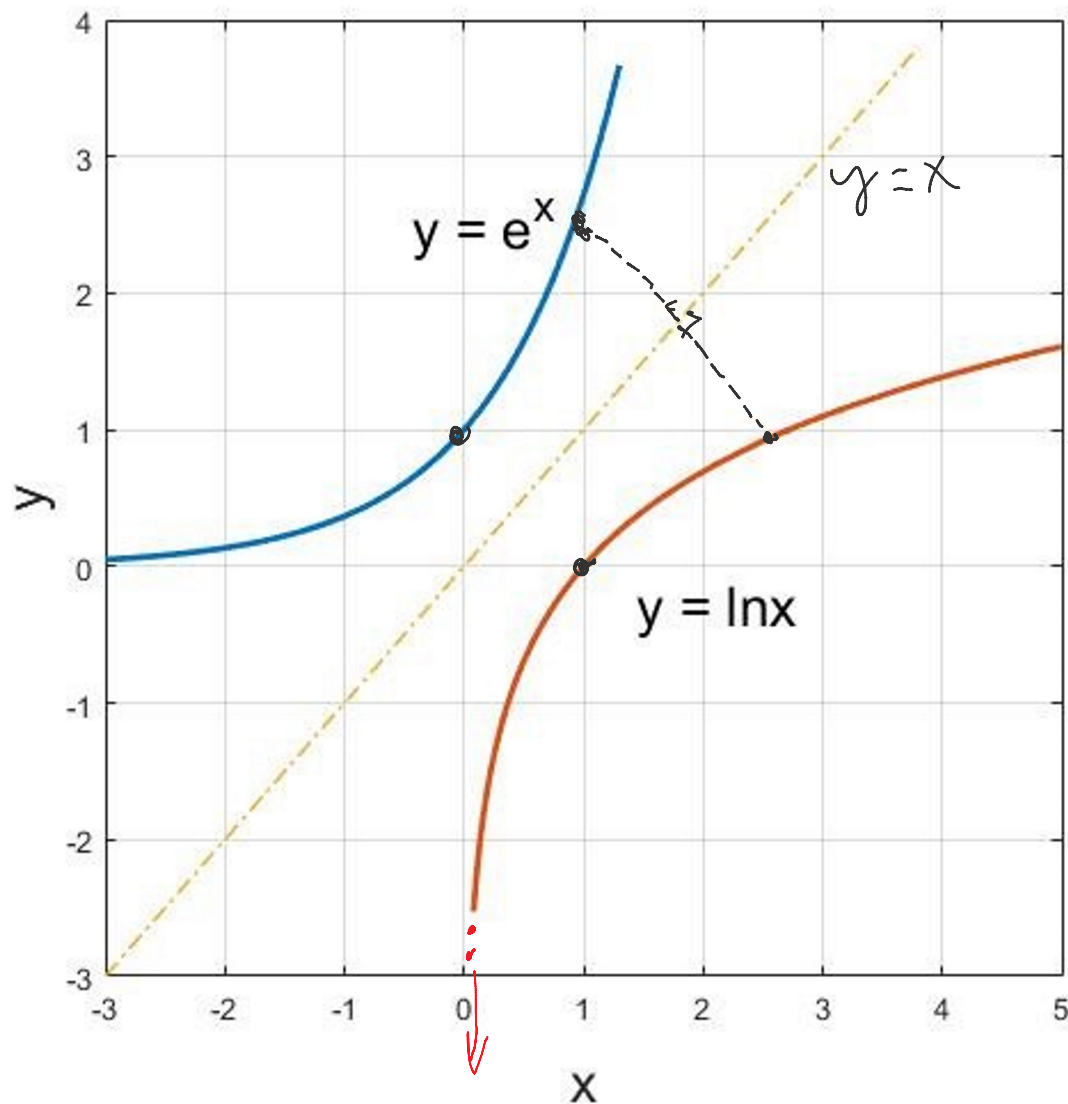
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$(e^x)^y = e^{x \cdot y}$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^p = p \cdot \ln x$$



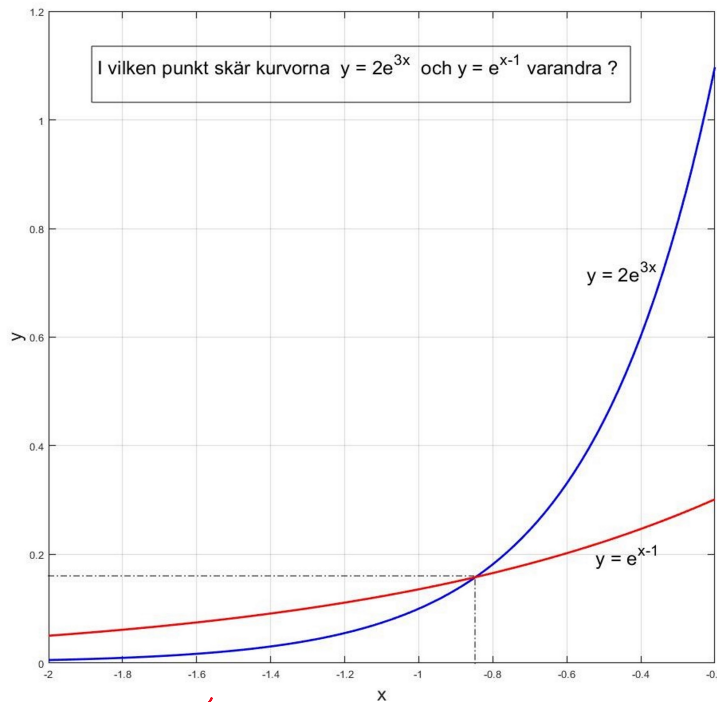
$$\ln(e^{100}) = 100 \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = 100$$

$\ln x$ avtar mot $-\infty$ då x närmar sig 0 från höger

$$\ln x \rightarrow -\infty \text{ då } x \rightarrow 0 (0^+)$$

Uppgift 1

den 3 november 2020 12:24



Lösning:

Vi undersöker ekvationen

$$2e^{3x} = e^{x-1} \quad (\text{dela med HL})$$

$$\frac{2e^{3x}}{e^{x-1}} = 1$$

$$2e^{3x-(x-1)} = 1 \quad (\text{dela med 2})$$

$$e^{2x+1} = \frac{1}{2} \quad (\text{Logaritmera})$$

$$\ln e^{2x+1} = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

$$2x+1 = -\ln 2$$

$$2x = -1 - \ln 2$$

$$x_0 = \frac{1}{2}(-1 - \ln 2) = -\frac{1 + \ln 2}{2} \approx -0.85$$

Forts:

$$y_0 = e^{x_0-1} = e^{-\frac{3+\ln 2}{2}} \approx 0.16$$

Svar: Kurvorna skär varandra i $(x_0; y_0)$

Alternativ:

Logaritmera istället (VL & HL)

$$\ln 2e^{3x} = \ln e^{x-1}$$

$$\ln 2 + \ln e^{3x} = x-1$$

$$\ln 2 + 3x = x-1$$

Dvs

$$\ln 2 + 3x = x-1$$

$$3x - x = -1 - \ln 2$$

$$2x = -1 - \ln 2$$

$$2x = -1 - \ln 2$$

$$x = -\frac{1 + \ln 2}{2}$$

Breakout 1

den 5 november 2020 08:06

Funktionen $f(x) = k \cdot e^{ax}$ går genom punkterna $(0; 2)$ och $(1; 8)$. Bestäm k och a .

Beräkna $f(2)$.

Lösning

x	$y = k \cdot e^{ax}$
0	$2 = k \cdot e^{a \cdot 0} = k \cdot e^0 = k \quad (e^0 = 1)$
1	$8 = k \cdot e^{a \cdot 1} = 2 \cdot e^a$

Återstår att bestämma a !

Ekvation i a

$$2e^a = 8 \quad \text{dela med 2}$$

$$e^a = 8/2 = 4 \quad (\text{Logaritmera})$$

$$\underbrace{\ln e^a}_{=a} = \ln 4$$

Dvs

$$\underline{f(x) = 2e^{(\ln 4) \cdot x}}$$

$$e^{x \cdot \ln 4} = e^{\ln(4^x)} = 4^x$$

$$\underline{f(x) = 2 \cdot 4^x}$$

$$\underline{\text{Svar: } k = 2, a = \ln 4 \approx 1.39}$$

$$f(2) = 2 \cdot 4^2 = \underline{\underline{32}}$$

Lös ekvationen

$$\ln(x+1) = \ln(8-x) - \ln(x)$$

Lösning:

Krav: $x-1 > 0$, $\underline{8-x > 0}$, $\underline{x > 0}$

$8-x > 0$, $\underline{x < 8}$

En lösning måste uppfylla att
 $\underline{\underline{0 < x < 8}}$

Se upp för falska rötter!

Alternativ: Sätt in i ekvationen!

$\underline{VL} = \ln(2+1) = \ln 3$, $\underline{HL} = \ln(8-2) - \ln 2 = \ln 6 - \ln 2 = \ln \frac{6}{2} = \ln 3 = \underline{VL}$ (ok)

$\ln x$ är definierad för $x > 0$ | $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

$$\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(8-x)$$

$$\ln(x \cdot (x+1)) = \ln(8-x) \quad (\text{Täglag } e^{VL} = e^{HL})$$

$$x \cdot (x+1) = 8-x \quad (e^{\ln a} = a)$$

$$x^2 + x = 8-x$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (2:a \text{ grad ekvation})$$

$$x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 8} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$$

Two lösningar

$$x_1 = -1 + 3 = 2, \quad x_2 = -1 - 3 = -4 \text{ (falsk!)}$$

$$\in (0, 8)$$

$$\notin (0, 8)$$

Svar $\underline{\underline{x=2}}$

Breakout 2

den 5 november 2020 08:07

Lös ekvationen

$$\ln(3) - \ln(x) = \ln(x - 4) - \ln(15)$$

‘
.
.

Undersök för vilka x följande funktioner är definierade.

a) $y = \ln(x-2) - \ln(x+4)$

x



b) $y = \ln\left(\frac{x-2}{x+4}\right)$

x



OBS: $\ln t$ är endast definierad för $t > 0$.

		-4		2		x
$x-2$	-	-	0	+		
$x+4$	-	0	+	+		
$f(x)$	+	?	-	0	+	

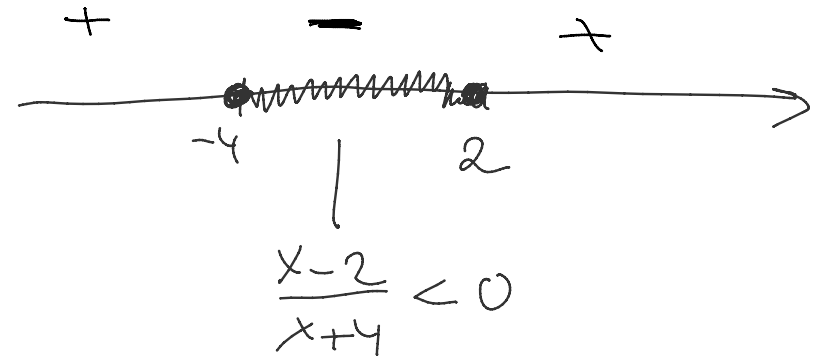
$$\frac{-}{-} = + \quad \frac{-}{-} = + \quad \frac{+}{-} = -$$

a) 1) $x-2 > 0$, 2) $x+4 > 0$

$$\underline{\underline{x > 2}}$$

b) 3) $f(x) = \frac{x-2}{x+4} > 0$

kvot av
två termer
shall vara
positiv



Uppgift 4

den 5 november 2020 08:07

Förenkla uttrycket

$$\underbrace{2 \lg 5}_{\lg 5^2} + \underbrace{\frac{\ln 6}{\ln 10}}_{\lg 6} - \lg 15 + \underbrace{\frac{\ln(e^2)}{2}}_2 - \underbrace{\frac{e^{\ln 3}}{3}}_3 = -1$$

$${}_a \log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$x = 6$$

$$a = 10$$

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\lg 5^2 + \lg 6 - \lg 15 - 1 = \lg \frac{5^2 \cdot 6}{15} - 1 = \lg 10 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$$

$$\lg a - \lg b = \lg(a/b)$$

Uppgift 2.17:

$$\bar{F}_1 = F \cdot \frac{e^{\mu\alpha} + 1}{e^{\mu\alpha} - 1}$$

a) Beräkna $\bar{F}_1$ om $F=1000\text{ N}$, $\alpha=\pi$, $\mu=0.30$

b) Lös ut μ ur formeln

$$a) \bar{F}_1 = 1000 \cdot \frac{e^{0.30\pi} + 1}{e^{0.30\pi} - 1} \text{ N} \approx 2.3 \text{ kN}$$

b) Sätt $X = e^{\mu\alpha}$

$$\text{Då är } \bar{F}_1 = F \cdot \frac{X+1}{X-1}$$

Lös ut X !

Multiplikera med $X-1$
på båda sidor ($X \neq 1$)

$$(X-1)\bar{F}_1 = F \cdot (X+1)$$

$$\bar{F}_1 X - \bar{F}_1 = F X + F \quad \left(\text{addera } -\bar{F}_1 X \right)$$

$$\bar{F}_1 X - F X = F + \bar{F}_1$$

$$(\bar{F}_1 - F)X = F + \bar{F}_1 = \bar{F}_1 + F$$

$$X = \frac{\bar{F}_1 + F}{\bar{F}_1 - F}$$

$$\text{Dvs } e^{\mu\alpha} = \frac{\bar{F}_1 + F}{\bar{F}_1 - F} \quad (\text{Logaritmera!})$$

$$\frac{\ln e^{\mu\alpha}}{\mu\alpha} = \ln\left(\frac{\bar{F}_1 + F}{\bar{F}_1 - F}\right)$$

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\bar{F}_1 + F}{\bar{F}_1 - F}\right)$$

1.7 (y som funktion av x)

den 5 november 2020 15:38

$$x + y^3 = 1$$

$$y^3 = 1 - x$$

$$y = \sqrt[3]{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x + y^4 = 1$$

$$y^4 = 1 - x$$

$$(x < 1)$$

$$y^2 = \pm \sqrt{1-x}$$

ingen funktion

$$\sqrt[3]{-1} = -1, \quad (-1)^3 = -1$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \quad (-2)^3 = -8$$

vidda rötter helt ok

Bestäm inversen till

$$f(x) = \frac{9}{4x-1}$$

Lösning

Lös ut x i ekvationen

$$y = \frac{9}{4x-1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Multiplera} \\ \text{med } 4x-1 \\ (4x-1 \neq 0) \\ x \neq \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$4x-1 = \frac{9}{y}$$

(delade
med y)

$$4x = \frac{9}{y} + 1 = \frac{9+y}{y}$$

$$x = \frac{y+9}{4y} = f^{-1}(y)$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+9}{4x}}$$