

Agenda

den 10 november 2020 09:37

- Mer om satserna om trianglar
- Radianer och grader
- Additionsformler

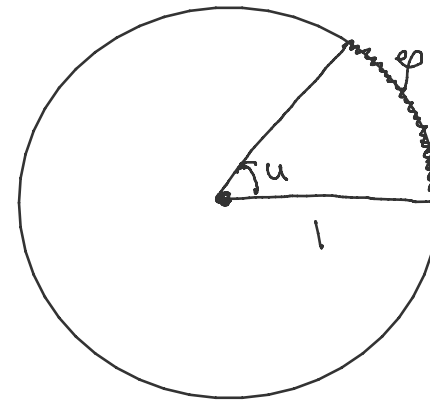
$$\begin{cases} \cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \\ \sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\ \tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(-u) = \cos u \\ \sin(-u) = -\sin u \end{cases}$$

$360^\circ = 2\pi$ radianer
↪
omkretsen för en cirkel
med radie 1

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$$

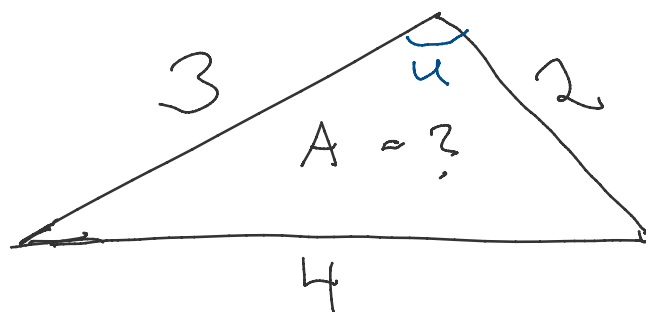


Längden av
bågen svarar
mot vinkeln
 $u^\circ = \varphi \text{ rad}$

Uppgift 1

den 10 november 2020 01:10

Beräkna arean av triangeln med sidorna 2, 3 och 4.



Lösning:

Areasatsen

$$A = \frac{a \cdot b \sin u}{2}$$

Vad är a och b och u ?

a & b är två sidor och u är vinkeln mellan dessa.

För att beräkna arean behöver vi en vinkel u och vi tar den mellan sidorna med längderna 2 och 3

Vi använder cosinussatsen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos u$$

(där c är sidan som står mot u)

$$4^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos u$$

$$16 = 13 - 12 \cos u \quad (*)$$

$$a) 12 \cos u = 13 - 16 = -3$$

$$\cos u = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Vad är $\sin u$?

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

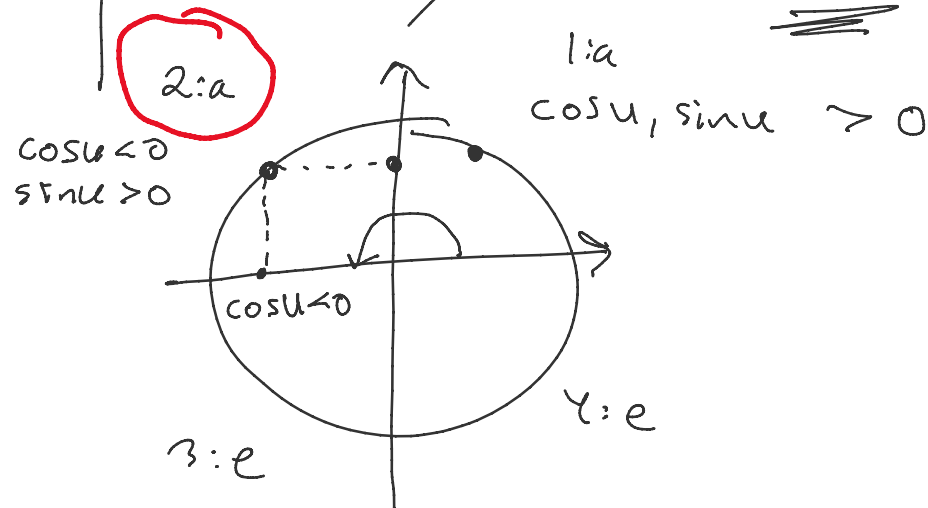
$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Area är

$$A = \frac{3 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ a.e.}$$



Breakout 1

den 10 november 2020 09:38

a) Omvandla 15° och 150° till radianer

b) omvandla $\frac{7\pi}{6}$ rad och $\frac{5\pi}{12}$ rad till grader

Lösning:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\begin{aligned} 15^\circ &= 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5}{60} \pi \\ &= \frac{1}{12} \pi = \frac{\pi}{12} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$150^\circ = 10 \cdot 15^\circ = 10 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

Tabell

$$30^\circ = \frac{30}{180} \pi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$45^\circ = \frac{45}{180} \pi = \frac{15}{60} \pi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$60^\circ = 2 \cdot 30^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$90^\circ = \frac{90}{180} \pi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$b) \frac{7\pi}{6} \text{ rad} = 7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$$

$$\frac{5\pi}{12} \text{ rad} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5}{2} \cdot 30^\circ = 75^\circ$$

$$\frac{7\pi}{6} \text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$$

Antag att $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Beräkna

$\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\tan 2\varphi$

Lösning

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \\ &= 1 - \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi \\ &= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{16-6}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\varphi &= 2\sin \varphi \cos \varphi = \\ &= \left[\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \pm \sqrt{1 - \frac{3}{16}} \right] \\ &= \pm \frac{\sqrt{13}}{4}\end{aligned}$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin \varphi \cos \varphi$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi, \quad \cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

Des

$$\sin 2\varphi = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pm \sqrt{13}}{4} = \pm \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{\pm \sqrt{39}/8}{5/8} = \pm \frac{\sqrt{39}}{5}$$

$\cot v = \frac{1}{3}$ och
 v är en vinkel i 3:e
 kvadranten.

Beräkna $\cos v$ och $\sin v$.

Lösning:

$$\frac{x}{y} = \cot v = \frac{1}{3}, \quad 3x = y$$

$$\underline{x^2 + y^2 = 1} \quad [y = 3x] \quad x = \frac{1}{3}y$$

$$x^2 + (3x)^2 = 1$$

$$x^2 + 9x^2 = 1$$

$$10x^2 = 1, \quad x^2 = \frac{1}{10}, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

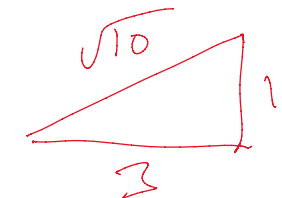
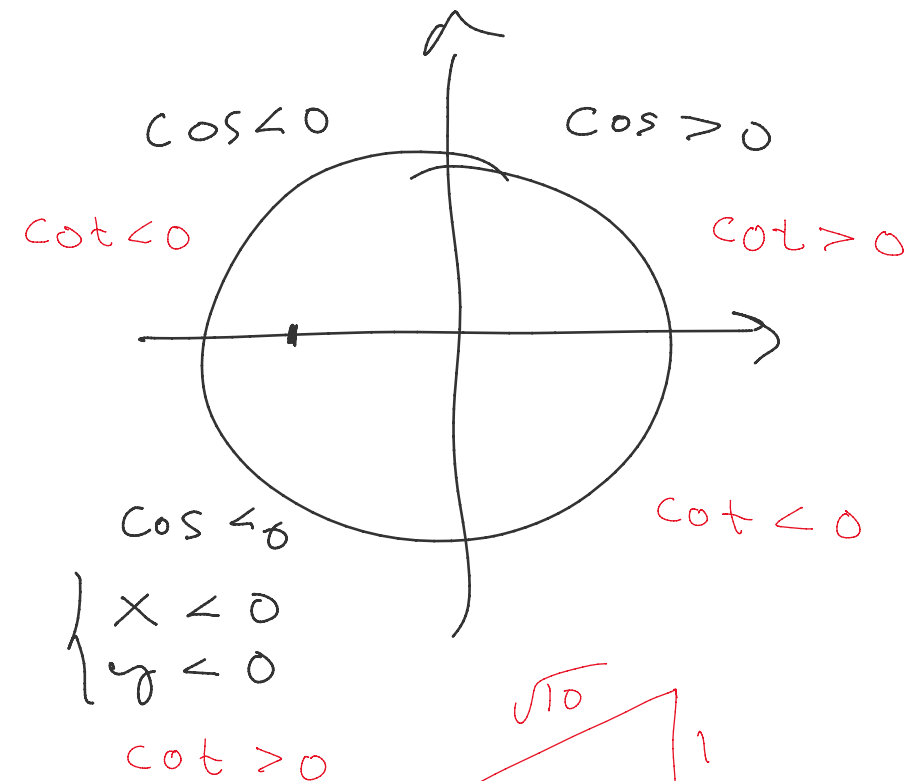
$$x = \frac{-1}{\sqrt{10}}, \quad y = 3 \cdot \frac{-1}{\sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v}$$

$$x = \cos v$$

$$y = \sin v$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$\frac{x}{y} = \frac{-1/\sqrt{10}}{-3/\sqrt{10}} = \frac{1}{3}$$

Fråga 1

den 12 november 2020 15:09

Bestäm definitionsmängd och
invers till funktionen

$$f(x) = \ln x - \ln(x-2)$$

Lösning

a) $\ln x$ är definierad för $x > 0$

$$\ln(x-2) \quad \sim \quad \sim \quad \underbrace{x-2 > 0}_{x > 2}$$



$$\underline{D_f = (2, \infty)}$$

b) Bestäm inversen

Lös ekvationen $y = f(x)$

(bestäm x i termer av y)

$$y = \ln x - \ln(x-2) = \ln \frac{x}{x-2}$$

$$e^y = e^{\ln \frac{x}{x-2}} = \frac{x}{x-2}$$

$$\left[\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \right]$$

$$\left[e^{\ln a} = a \right]$$

$$(x-2)e^y = x$$

$$x \cdot e^y - 2e^y = x$$

$$xe^y - x = 2e^y$$

$$x \cdot (e^y - 1) = 2e^y$$

$$x = \frac{2e^y}{e^y - 1} = f^{-1}(y)$$

$$x > 2 \Rightarrow e^y - 1 > 0, \underline{y > 0}$$

$$\tilde{f}^{-1}(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

~~~~~

$$f(f^{-1}(x)) = x \in D_{f^{-1}} = (0, \infty)$$

$$\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x)) = x \in D_{\tilde{f}}$$

## Fråga 2

den 12 november 2020 15:44

5. Lös följande ekvationerna (a) och (b) för  $x \in \mathbb{R}$ , och ekvationerna (c) och (d) för  $z \in \mathbb{C}$ .

(a)  $\lg(\ln(\lg x)) = 0$

(3p)

(b)  $\sin(2x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$

(3p)

(c)  $2z + (1 - i)\bar{z} = 1$

(3p)

(d)  $z^4 = 1 + i$

(3p)

5a  $\lg(\ln(\lg x)) = 0$

$$10^{\lg(\ln(\lg x))} = 10^0 = 1$$

$$\ln(\lg x) = 1$$

$$e^{\ln(\lg x)} = e^1 = e$$

$$\lg x = e$$

$$\frac{10^{\lg x}}{x} = 10^e$$

$$\lg(x) = {}^{10}\log(x)$$

$$10^{\lg(x)} = x \quad \leftarrow$$

$$\lg 1 = 0, \quad 10^0 = 1$$

$$\ln(e) = 1, \quad e^1 = e$$

Svar :  $x = 10^e$