

Komplexa tal

$z = x + iy$, x och y är reella, $i^2 = -1$

- Algebraiska ekvationer

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Av grad } n \\ n \geq 1 \end{array} \right.$$

$a_i \in \mathbb{C} = \{\text{komplexa tal}\}, a_n \neq 0$

- Polär form / Polära koordinater

Faktorisera $p(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$. $\downarrow a_0$

Lösning: Vet att $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$

där z_1, z_2 och z_3 är rötter till ekv. $p(z) = 0$

1. Leta efter heltalsrötter r . Vårt polynom har heltalshoefficienter och i sådana fall delar $a_0 = -2$: $r|2 \Rightarrow r = \pm 1, \pm 2$

$$p(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 2 = -2 \neq 0$$

$$p(-1) = -1 - 2 - 1 - 2 \neq 0$$

$$p(2) = 8 - 8 + 2 - 2 = 0 \text{ ok.}$$

Dvs $z - 2$ är en faktor i $p(z)$, $z - 2 | p(z)$

$$\begin{array}{r} z^2 + 1 \\ z-2 \overline{) z^3 - 2z^2 + z - 2} \\ \underline{-(z^3 - 2z^2)} \\ z - 2 \\ \underline{-(z - 2)} \\ 0 \text{ rest} \end{array} \quad \text{kvot}$$

$$\text{Dvs } p(z) = (z - 2)(z^2 + 1)$$

Återstående rötter ges av ekv. $z^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{z = \pm i}}$$

Dvs 2 och $\pm i$ är polstärkerna till $p(z)$

$$\text{Dvs } p(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z - 2)(z - i)(z + i)$$

Faktoriserar $p(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$

L: Polynomet har heltalskoefficienter

$\Rightarrow$ Sök efter heltalsrot $r \mid 6$

$$p(-3) = 0$$

polynomdivision med $z - (-3) = z + 3$

$$p(z) = (z + 3)(z^2 - 2z + 2)$$

Övriga rötter

$$z^2 - 2z + 2 = 0, \text{ p,q-formeln } \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

kvadratkomplettera

$$(z-1)^2 - \underbrace{(-1)^2 + 2}_{=1} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad (z-1)^2 + 1 = 0, \quad (z-1)^2 = -1$$

$$z-1 = \pm i$$

Svar: $p(z) = (z+3)(z-(1+i))(z-(1-i))$

$$= (z+3)(z-1-i)(z-1+i)$$

Ekvationen

$$p(z) = z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 26z + 20 = 0$$

har roten $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Bestäm övriga rötter.

Lösning: $p(z)$ har reella koefficienter

$z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ är en rot $\Leftrightarrow z_2 = \bar{z}_1 = 1 + \sqrt{3}i$ är en rot

Dvs $(z - (1 - \sqrt{3}i)) \cdot (z - (1 + \sqrt{3}i)) = z^2 - 2z + 1^2 + (\sqrt{3})^2 = z^2 - 2z + 4$ delar $p(z)$

$$\begin{array}{r}
 z^2 - 4z + 5 \quad \text{kvot} \\
 \hline
 z^2 - 2z + 4 \quad \left| \begin{array}{l} z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 26z + 20 \\ - (z^4 - 2z^3 + 4z^2) \\ \hline -4z^3 + 13z^2 - 26z + 20 \\ - (-4z^3 + 8z^2 - 16z) \\ \hline 5z^2 - 10z + 20 \\ - (5z^2 - 10z + 20) \\ \hline 0 \end{array} \right. \text{rest}
 \end{array}$$

Dvs

$$p(z) = (z^2 - 2z + 4) \cdot (z^2 - 4z + 5)$$

Övriga rötter ges av $z^2 - 4z + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (z - 2)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 2)^2 = -1 \quad (= i^2)$$

$$z - 2 = \pm i$$

$$z = 2 \pm i$$

Samtliga rötter är: $1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, 2 + i, 2 - i$

$$\begin{aligned}
 &+ (z - (a + bi))(z - (a - bi)) = \\
 &= z^2 - \underbrace{z(a - bi) - (a + bi)z}_{\text{inga Imaginärdel}} + \underbrace{(a + bi)(a - bi)}_{a^2 + b^2} \\
 &= z^2 - 2az + (a^2 + b^2)
 \end{aligned}$$

Min duggen

$P(z)$

Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 6z - 30 = 0$ har en icke-reell rot med realdelen 1

a) Uppdela $z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 6z - 30$ i reella faktorer

Svar:   

b) Lös ekvationen $z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 6z - 30 = 0$

Svar: rötterna är 

OBS! Ange samtliga lösningar separerade med semikolon, t.ex. 1; 2-i

L: $1+ai$ är en rot (reella koef.) $\Leftrightarrow 1-ai$ är en rot ($a \in \mathbb{R}$)

$$(z - (1+ai))(z - (1-ai)) = z^2 - 2z + 1 + a^2 \quad \text{delar } P(z)$$

$$\begin{array}{r} z^2 - 2z + 1 + a^2 \quad \overline{) \quad z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 6z - 30} \\ \underline{-(z^4 - 2z^3 + (1+a^2)z^2)} \\ (6-a^2)z^2 + 6z - 30 \\ \underline{-(6-a^2)z^2 - (12-2a^2)z + (1+a^2)(6-a^2)} \\ (6+12-2a^2)z - (1+a^2)(6-a^2) - 30 = 0 \end{array}$$

$[7z^2 - (1+a^2)z^2 - (7-1-a^2)z^2]$

Vi kan nu bestämma parametern a

Koefficienten för z är 0, Detsamma för konst.-koef.

$$\begin{aligned} \text{Dvs } 18 - 2a^2 &= 0 & \& \quad -(1+a^2)(6-a^2) - 30 = 0 \\ a^2 &= 9 & \text{insättning ger } & \quad -(1+9)(6-9) - 30 = 30 - 30 = 0 \\ a &= \pm 3 & & \end{aligned}$$

Dvs $1+3i$ och $1-3i$ är rötter!

Men kvoten är $z^2 + 6 - a^2 = z^2 - 3$

De sista två rötterna erhåller vi ur $z^2 - 3 = 0$
 $z = \pm\sqrt{3}$

$$P(z) = (z^2 - 2z + 10)(z^2 - 3) = (z^2 - 2z + 10)(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})$$

Polär form / Polära koordinater

Skriv följande tal i polär form

a) $1 + \sqrt{3}i$

b) $2 - 2i$

c) $-\sqrt{3} - i$

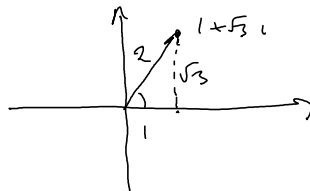
a) $z = 1 + \sqrt{3}i$

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

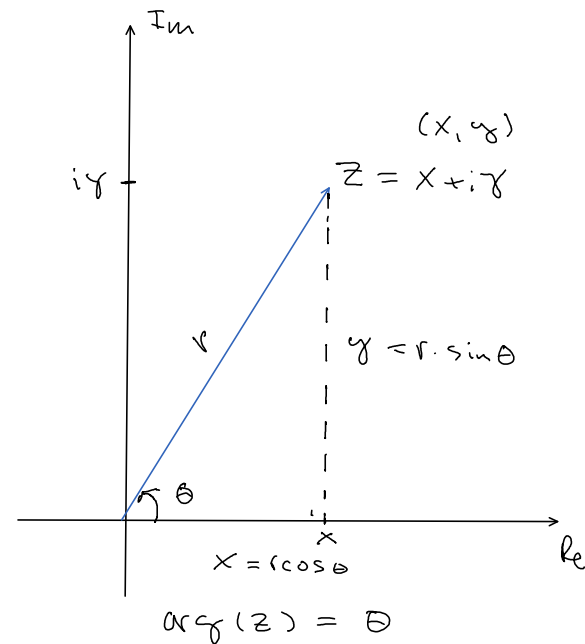
$$z = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Dvs $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$



$$z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$



$$z = r \cos \theta + i \cdot r \sin \theta =$$

$$= r (\cos \theta + i \sin \theta) \leftrightarrow (r, \theta)$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{polär koordinat}$$

$$z^2 = 8i ?$$

den 26 november 2020 15:49

$$z^2 = 8i$$

Satz $z = x + iy$, $z^2 = x^2 - y^2 + i 2xy = 8i$

Identifizier koef.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 8 \end{cases}$$

$$(\operatorname{Re} VL = \operatorname{Re} HL)$$

$$(\operatorname{Im} VL = \operatorname{Im} HL)$$