Föreläsning 6

Avs. 7.1 (Maximum och minimum)

<u>Def.</u> En funktion f sägs ha ett <u>lokalt maximum</u> i en punkt $(a, f(a))$ om ;

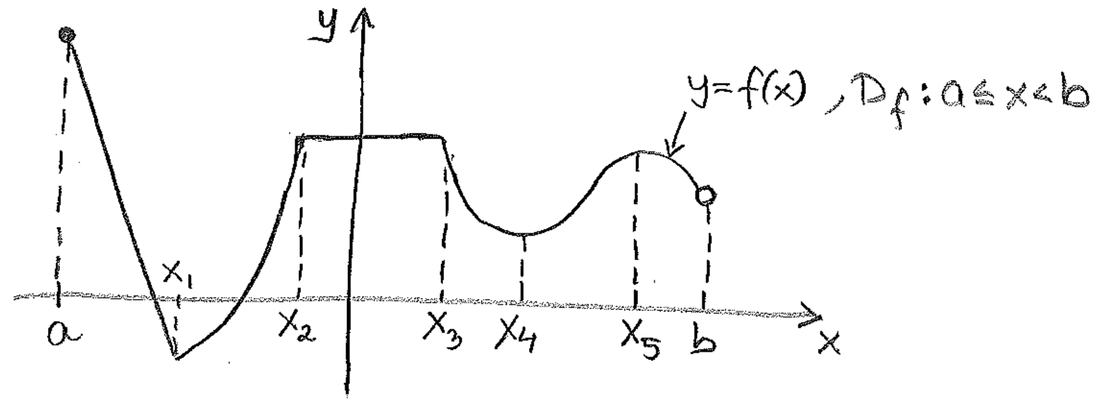
$$f(x) \leq f(a)$$

för alla $x \in D_f$ i en liten omgivning av a (dvs. $|x-a| < \delta$, för något $\delta > 0$)

<u>Anm.</u> <u>Lokalt minimum</u> definieras analogt fast med olikheten $f(x) \geq f(a)$.

<u>Anm.</u> Lokala minimi- och maximipunkter kallas gemensamt för <u>lokala extrempunkter</u>

<u>Ex.</u>



f har ett lokalt maximum i $(a, f(a))$, $(x_5, f(x_5))$, samt i alla punkter $(x, f(x))$ där $x_2 \leq x \leq x_3$.

f har ett lokalt minimum i $(x_1, f(x_1))$, $(x_4, f(x_4))$, samt i alla punkter $(x, f(x))$, där $x_2 < x < x_3$.
obs! f har <u>ej</u> lok. min där $x = b$.

<u>Anm.</u> Funktionens största värde på intervallet $[a, b)$ är $f(x_1)$.
Funktionens minsta värde på intervallet $[a, b)$ är $f(x_1)$.

Anm. En punkt $x=a$ där $f(x)$ inte är deriverbar sägs vara en <u>singulär punkt</u>

Anm. Notera i ovanstående exempel att $f'(x_4)=0$, $f'(x_5)=0$ och $f'(x)=0$, då $x_2<x<x_3$.

Sats. (Satsen om derivatans nollställen)

Om en funktion $f(x)$ har ett lokalt maximum eller minimum i en punkt $(a, f(a))$ och om f är deriverbar i $x=a$, så är;

$$f'(a)=0$$

bevis Antag att $(a, f(a))$ är ett lokalt maximum (fallet med lok. min visas på liknande vis)

Då vet vi att $f(x) \leq f(a)$, för alla $x \in D_f$ i en liten omgivning av $x=a$.

Speciellt följer att;

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \leq 0$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \geq 0$$

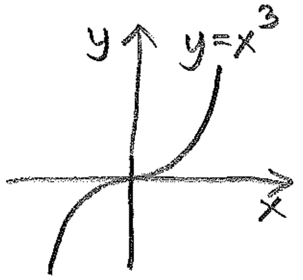
Således är; $0 \leq f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \leq 0$

så vi måste ha $f'(a)=0$ VSB.

<u>Anm.</u> En punkt $x=a$ som är sådan att $f'(a)=0$ sägs vara en <u>kritisk punkt</u>

<u>Anm.</u> I korthet betyder satsen att;

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ lok. max/min i } x=a \\ f \text{ deriverbar i } x=a \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ kritisk punkt i } x=a \quad (\text{dvs. } f'(a)=0)$$



Det är inte ekvivalens ty betrakta t.ex. $f(x)=x^3$ i $x=0$. Då är $f'(x)=3x^2$ och därmed $f'(0)=0$, men f har inget lokalt max eller min i $x=0$.

<u>Uppg.</u> Bestäm alla kritiska punkter till följande funktioner;

a) $4x^3-9x^2-12x+7$

b) $x^2+\frac{1}{x^2}$

c) $x\ln x$

d) $2\arctan x - x$

<u>Lösn.</u> a) $D(4x^3-9x^2-12x+7)=12x^2-18x-12=0$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{3}{2}x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+1}=\frac{3\pm5}{4}$

$\therefore$ kritiska punkter är $x=\frac{-1}{2}$ och $x=2$

b) $D\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=2x-\frac{2}{x^3}=0 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=\pm1$

$\therefore$ kritiska punkter är $x=-1$ och $x=1$.

c) $D(x\ln x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

kritisk punkt: $x = e^{-1}$

d) $D(2\arctan x - x) = \frac{2}{1+x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

kritiska punkter: $x=-1$ och $x=1$

<u>Sats.</u> (Satsen om största och minsta värde)

Om $f(x)$ är kontinuerlig i ett slutet intervall $[a,b]$ så antar f ett största och minsta värde på $[a,b]$.

<u>Anm.</u> Av satsen om derivatans nollställen följer att en funktions största och minsta värde på ett intervall $I=[a,b]$ antas i;

1. randpunkt till I
2. singulär punkt i I

eller

3. kritisk punkt i I

<u>Uppg.</u> Bestäm största och minsta värde för $f(x) = x^3 - 3x + 1$ på intervallet $[0,2]$.

<u>lösn.</u> $f(x)$ är ett polynom och därmed kontinuerlig så enl. satsen ovan antar $f(x)$ ett största och minsta värde på intervallet $[0,2]$.

① (randpunkter) $f(0) = \underline{\underline{1}}$, $f(2) = \underline{\underline{3}}$

② (singulära punkter) inga singulära punkter ty $f(x)$ är deriverbar på $[0,2]$

③ (kritiska punkter) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$x = 1$ är den enda kritiska punkten i intervallet $[0,2]$, och $f(1) = \underline{\underline{-1}}$

Av de understrukna talen ovan (kandidater) så ser vi att 3 är störst och −1 är minst.

$$\therefore \max_{x \in [0,2]} f(x) = 3 \quad \text{och} \quad \min_{x \in [0,2]} f(x) = -1$$

Avs. 7.2 (växande och avtagande)

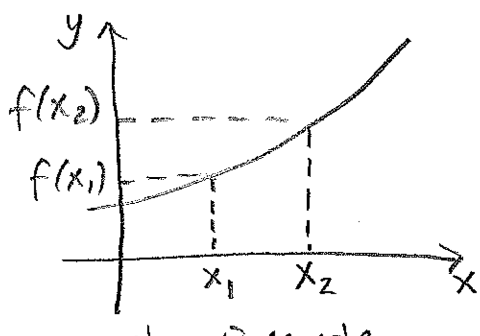
Def. En funktion $f(x)$ sägs vara;

<u>strängt växande</u> på ett intervall I om

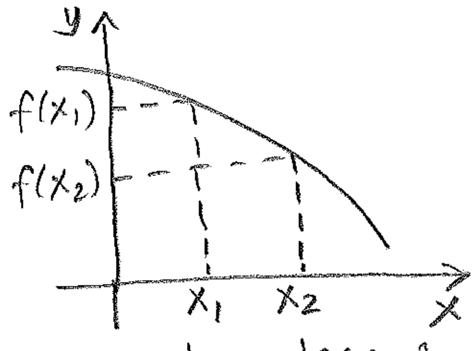
$$x_1, x_2 \in I, \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

<u>strängt avtagande</u> på ett intervall I om

$$x_1, x_2 \in I, \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



str. växande

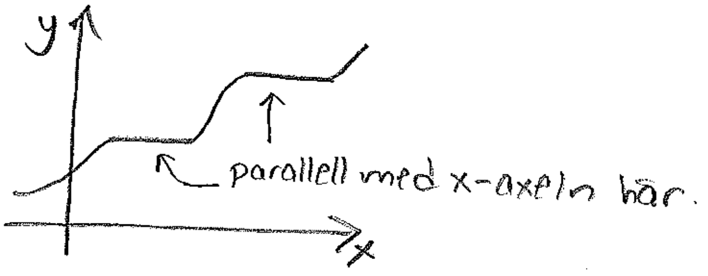


str. avtagande

Anm. Om vi byter ut $f(x_1) < f(x_2)$ mot $f(x_1) \leq f(x_2)$ så sägs f (bara) vara <u>växande</u>

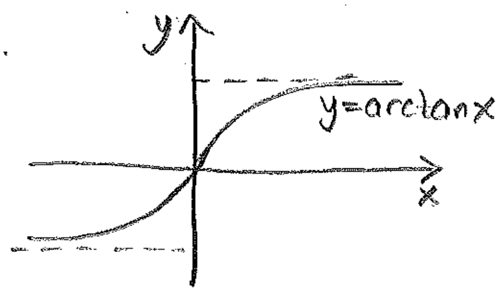
och byter vi $f(x_1) > f(x_2)$ mot $f(x_1) \geq f(x_2)$ så sägs f (bara) vara <u>avtagande</u>

En växande funktion kan t.ex. se ut så här;



Anm. En funktion som är (strängt) växande eller (strängt) avtagande sägs vara (strängt) <u>monoton</u>.

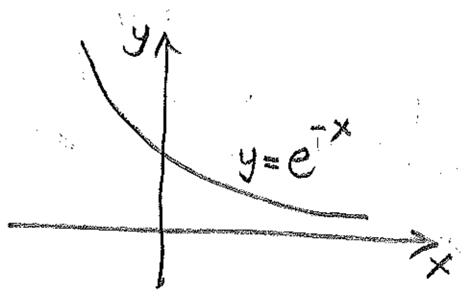
Ex.



<u>Notera att:</u>

arctanx är <u>str. växande</u>

$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$



e^{-x} är <u>str. avtagande</u>

$D(e^{-x}) = -e^{-x} < 0$

Detta samband mellan växande/avtagande och derivatans tecken skall vi studera närmare på nästa föreläsning.