

Derivata

Vi börjar med att repetera ett par viktiga begrepp från förra delkursen, nämligen gränsvärden och kontinuitet.

En funktion $f(x)$ kan ha ett högergränsvärde i a , som (om det finns) är det reelltal som $f(x)$ "kommer oändligt nära" då x "kommer oändligt nära" a från höger. Detta skrivs $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. På motsvarande sätt kan vi ibland tala om ett vänstergränsvärde i a , som skrivs $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

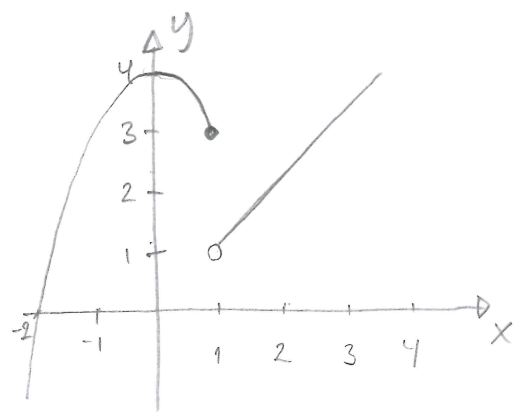
Exempel: Funktionen $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{om } x \leq 1 \\ x & \text{om } 1 < x \end{cases}$

har högergränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

och vänstergränsvärdet

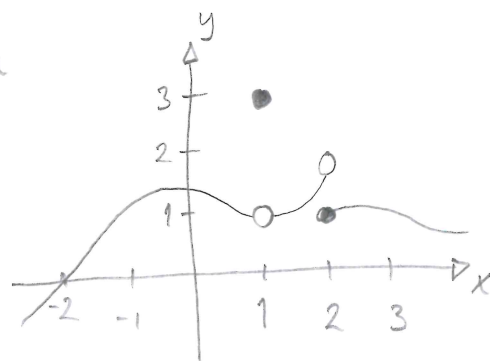
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4-x^2 = 3$$



i $a=1$. Funktionsvärdet i punkten är $f(1)=3$.

Definition: Om $f(x)$ har ett högergränsvärde och ett vänstergränsvärde i a , och dessa är lika, säger vi att $f(x)$ har ett gränsvärde i a (som är lika med höger- och vänstergränsvärdena) och betecknar det $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Exempel: Låt $f(x)$ vara funktionen i figuren. Här existerar inte gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, eftersom



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1.$$

Däremot existerar gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, då

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x),$$

dvs

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1.$$

Observera dock att $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1) = 3$.

Alltså:

- (i) $x=a$ och $x \rightarrow a$ betyder olika saker!
- (ii) Bara för att $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existerar är det inte säkert att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Om $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ säger vi att f är kontinuerlig i a .

Om f är kontinuerlig i alla punkter i sin definitions-
mängd kallar vi f för kontinuerlig.

Följande funktioner (och sammansättningar osv) är
kontinuerliga:

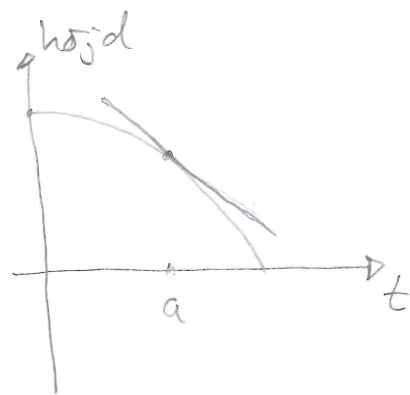
- polynom
- potensfunktioner (även rötter)
- exponentielfunktioner
- logaritmer
- trigonometriska funktioner
- rationella funktioner
- ...

Vi skall nu strax införa begreppet derivata, som
kan tolkas som en funktions tillväxthastighet,
men först lite motivering till varför.

(4.)

Exempel: Antag att ett föremål släpps (i vila) från 10 m över marken. Då beskriver $f(t) = 10 - \frac{g}{2}t^2$ föremålets höjd över marken vid tiden t , där $g \approx 9.82$ är tyngdaccelerationen.

Hur snabbt faller föremålet vid tiden $t=a$? Detta ges av (negativa) lutningen av kurvans tangent i punkten. I det här fallet säger fysikens lagar att hastigheten ges av $v(t) = -gt$, men vi vill kunna räkna fram motsvarande för andra funktioner också.



Problem: Beräkna lutningen för kurvan till $f(x)$ i punkten x .

Idé: Tag en till punkt $x+h$ för ett litet h , och beräkna lutningen för den rätta linjen genom $(x, f(x))$ och $(x+h, f(x+h))$. Låt sedan $h \rightarrow 0$.

Riktningsskoefficienten för linjen blir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Definition: Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar säger vi att f är deriverbar i a ,
och vi håller gränsvärdet $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

för derivatan av f i a .

Funktionen $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ håller vi
för derivatan av f .

Andra beteckningar man kan drabbas av är:

$$y'(x), y', f', \dot{y}, \dot{f}, Dy, Df, \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \dots$$

Exempel: Bestäm f' om $f(x) = x^2$. Definitionsmängden
är $\mathbb{R}$. Enligt definitionen får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x+h = 2x. \end{aligned}$$

Om n är ett positivt heltal går det på ett
liknande sätt att visa att $D[x^n] = nx^{n-1}$, dvs

$$D[x^3] = 3x^2, \quad D[x^{10}] = 10x^9, \quad \text{osv.}$$

Exempel: Beräkna $\frac{df}{dx}$ om $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Här är

(6)

$D_f = [0, \infty)$. För $x > 0$ gäller

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Exempel: Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Här är $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

För $x \neq 0$ är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}. \end{aligned}$$

Exemplen ovan troliggör att $D[x^r] = r x^{r-1}$ även om r inte är ett positivt heltal. Detta är sant, och vi skall återkomma till det längre fram, men tills vidare använder vi denna räkneregel utan bevis.

Eftersom $f'(a)$ är riktningskoefficienten för tangenten i $x=a$ kan vi beräkna tangenter och normaler till en kurva med hjälp av derivatan.

(7.)

Exempel: Bestäm ekvationen för tangenten till $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i punkten $x = -2$. Om vi skriver tangentens ekvation som $y = k_T x + m_T$ får vi $k_T = f'(-2)$ och kan sedan använda exempelvis enpunktsformeln. Vi beräknar $f'(x) = D[\frac{1}{x^2}] = D[x^{-2}] = -2x^{-3}$ och får $k_T = f'(-2) = \frac{1}{4}$. Eftersom $(-2, f(-2))$ ligger på linjen ger en punkts formeln att

$$y - f(-2) = k_T(x - (-2)) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x+2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{x+3}{4}.$$

Exempel: Bestäm ekvationen för normalen till $f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ i punkten $x = \frac{1}{2}$. Normalen är vinkelrät mot tangenten, så riktningskoefficienten k_N för normalen är lika med $-\frac{1}{k_T}$ (där k_T är tangentens riktningskoefficient).

Vi beräknar $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, som ger oss

$$k_N = -\frac{1}{k_T} = -\frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = -\frac{1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ ligger på normalen, så

(8.)

Tangentenformeln ger oss

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = h_N\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{7\sqrt{2}}{12}.$$