Föreläsning 2

Avs. 6.2-6.3, forts.

Derivatan av en funktion $f(x)$ definieras av;

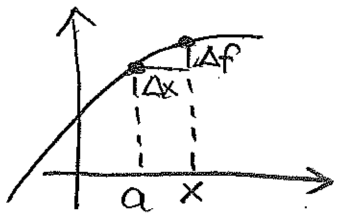
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Anm 1 Det finns även andra vanliga beteckningar för derivata t.ex.

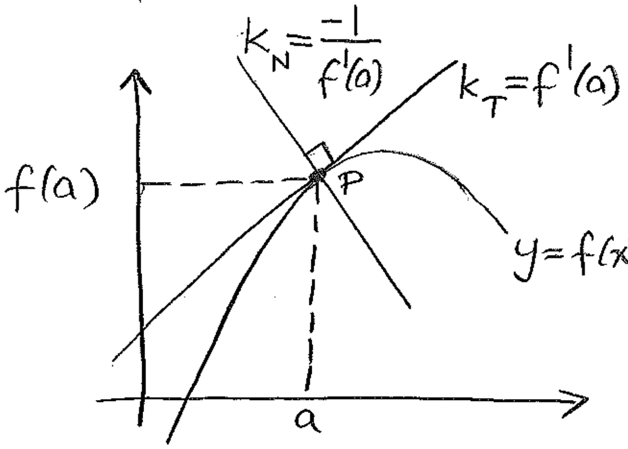
f'	$\frac{df}{dx}$	$\dot{f}$	Df
Lagrange notation	Leibniz notation	Newtons notation (används enbart för tidsderivata)	Eulers notation

Anm. 2 Det finns också andra sätt att skriva differenskvoten i definitionen av derivata t.ex.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\Delta f}}{\underbrace{x - a}_{\Delta x}}$$



Med <u>normalen</u> till en kurva $y=f(x)$ i en punkt $P=(a,f(a))$ menas den linje genom P som är vinkelrät mot kurvans tangent genom P.



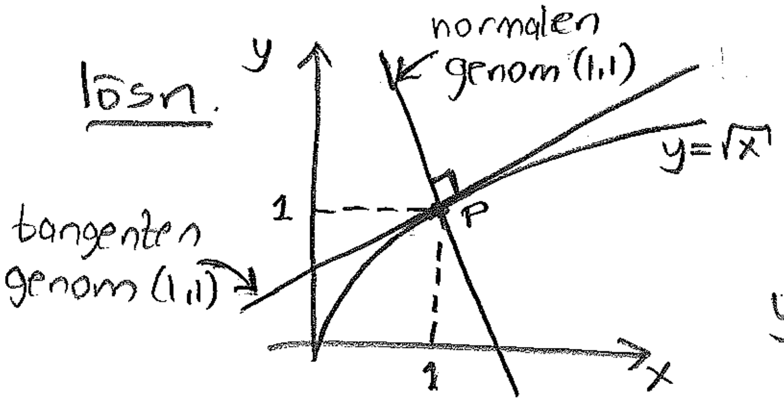
Från tidigare kurs vet vi att normalens riktningskoeff. k_N är sådan att $k_N k_T=-1$ (om $k_T \neq 0$) dvs. $k_N=\frac{-1}{k_T}=\frac{-1}{f'(a)}$

Med en enpunktsformeln beskrivs <u>normalen</u> därför med ekvationen;

$$\boxed{y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)}$$

<u>Uppg.</u> Bestäm ekvationen för normalen till kurvan $y=\sqrt{x}$ i punkten $(1,1)$

<u>Lösn.</u>



$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{2}$

så normalens ekv. är;

$y-1=\frac{-1}{1/2}(x-1) \Leftrightarrow y-1=-2(x-1)$

$\Leftrightarrow \underline{y=3-2x}$

Avs. 6.5 Följande deriveringsregler gäller;

$$D[f(x)+g(x)] = Df(x) + Dg(x)$$

$$D[Cf(x)] = C \cdot Df(x)$$

Produktregeln: $D[f(x)g(x)] = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)$

Kvotregeln: $D\left[\dfrac{T(x)}{N(x)}\right] = \dfrac{DT(x) \cdot N(x) - T(x) \cdot DN(x)}{N(x)^2}$

Ex. $D[5x^3 - 4\sqrt{x} + 3] = 5 \cdot 3x^2 - 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = 15x^2 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Ex. $D[\underbrace{(x^2+7)}_{f(x)}\underbrace{\sqrt{x}}_{g(x)}] \overset{\text{produktregeln}}{=} \underbrace{2x}_{Df(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_{g(x)} + \underbrace{(x^2+7)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}_{Dg(x)}$

$$= \frac{5}{2}x\sqrt{x} + \frac{7}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ex. $D\left[\dfrac{\overset{T(x)}{x^2 - 3x + 1}}{\underset{N(x)}{x^3 + 4x}}\right] = \dfrac{\overbrace{(2x-3)}^{T'(x)}\overbrace{(x^3+4x)}^{N(x)} - \overbrace{(x^2-3x+1)}^{T(x)}\overbrace{(3x^2+4)}^{N'(x)}}{\underbrace{(x^3+4x)^2}_{N(x)^2}} =$

$$= \frac{-x^4 + 6x^3 + x^2 - 4}{(x^3+4x)^2}$$

Uppg. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $y=\frac{x-4}{x+2}$ i den punkt där kurvan skär x-axeln.

Lösn. $f(x)=\frac{x-4}{x+2}=0 \Leftrightarrow x=4$

så kurvan skär x-axeln i punkten $(4,0)$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)-(x-4)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{6}{(x+2)^2}$$

$f'(4)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$ så $k_T=\frac{1}{6}$ och $k_N=-6$

Enpunktsformeln ger då att

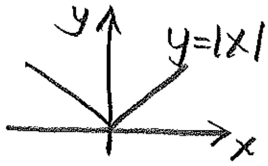
tangentens ekv: $y-0=\frac{1}{6}(x-4) \Leftrightarrow \underline{y=\frac{1}{6}x-\frac{2}{3}}$

normalens ekv: $y-0=-6(x-4) \Leftrightarrow \underline{y=24-6x}$

Avs. 6.4 Derivatan existerar inte alltid.

Betrakta t.ex. $f(x)=|x|$ i punkten $x=0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{då } h>0 \\ -1, & \text{då } h<0 \end{cases}$$



vilket saknar gränsvärde då $h \to 0$.

Av detta exempel inser vi att differenskvoten i derivatans definition måste ha samma gränsvärde då $h \to 0^-$ som då $h \to 0^+$.
Vi definierar därför;

Vänsterderivata : $f'_-(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Högerderivata : $f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

så $f'(a)$ existerar om och endast om $f'_-(a)$ och $f'_+(a)$ existerar och $\boxed{f'_-(a) = f'_+(a)}$

Uppg. Är $f(x)=x^2|x|$ deriverbar i $x=0$

Lösn. $$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^2|h|}{h} = h|h| = \begin{cases} h^2, & \text{då } h>0 \\ -h^2, & \text{då } h<0 \end{cases}$$

Vi avläser att $f'_-(0)$ och $f'_+(0)$ existerar och att $f'_-(0) = 0 = f'_+(0)$ så
f är deriverbar i $x=0$ och $f'(0)=0$.

<u>Sats</u> Om en funktion f är deriverbar i en punkt $a \in D_f$ så är f även kontinuerlig i punkten a.

<u>bevis</u> Om f är deriverbar i a så existerar;

$$f'(a) = \lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

I så fall får vi att;

$$\underline{\lim_{x\to a} f(x)} = \lim_{h\to 0} f(a+h) =$$

$$= \lim_{h\to 0} (f(a+h) - f(a) + f(a)) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \Big(\underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} + f(a) \Big) =$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = \underline{f(a)}$$

vilket visar att f är kont. i a. VSB

<u>Anm</u> För att en funktion skall vara deriverbar i a måste alltså;

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)}$$

<u>obs!</u> Kontinuitet är inte tillräckligt för att vara deriverbar. T.ex. såg vi ju att $f(x) = |x|$ var kont. i $x = 0$ men ej deriverbar där.