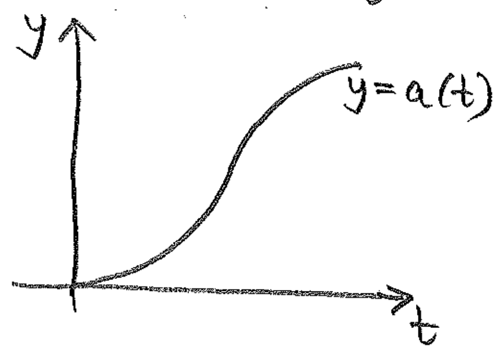
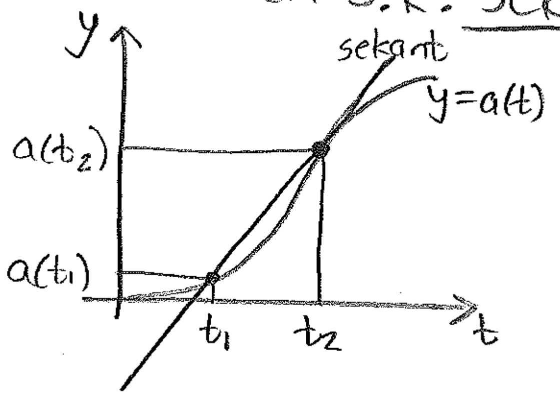
Föreläsning 1

Avs. 6.2 Antag att en funktion $a(t)$ beskriver hur långt en person cyklat t minuter efter en viss given tidpunkt, och att dess graf har följande utseende;



Om vi drar en linje mellan två punkter på kurvan så får vi en s.k. sekant

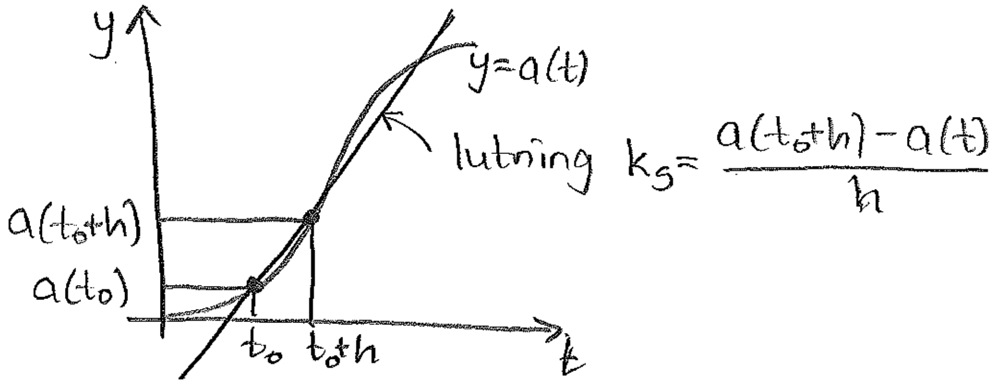


Sekantens riktningskoefficient $k_s = \dfrac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}$

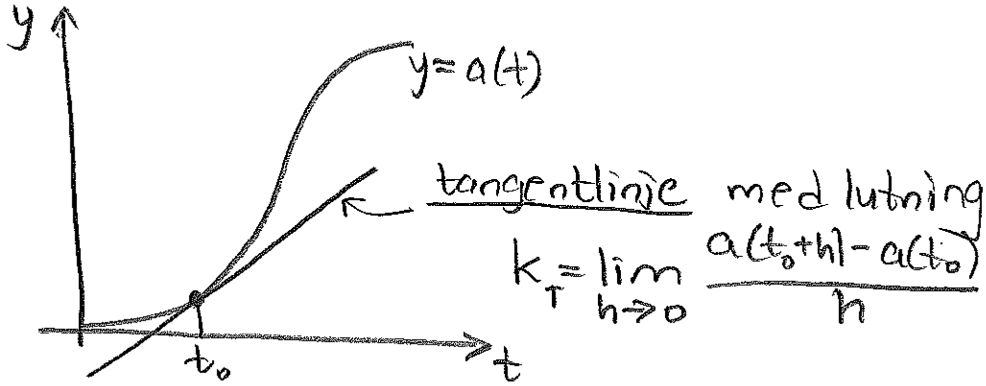
ger ett mått på hur långt personen cyklat mellan två tidpunkter i relation till hur lång tid som gått.

Värdet på k_s sägs vara cyklistens medelhastighet i intervallet $[t_1, t_2]$

Om man är intresserad av cyklistens fart vid en viss tidpunkt t_0 så kan vi mäta medelhastigheten i ett intervall $[t_0, t_0+h]$, för något litet tal $h>0$.



Låter vi sedan $h \to 0$ får vi den momentana hastigheten vid tidpunkten t_0, vilket kan tolkas som lutningen på den linje som tangerar grafen i punkten $(t_0, a(t_0))$;

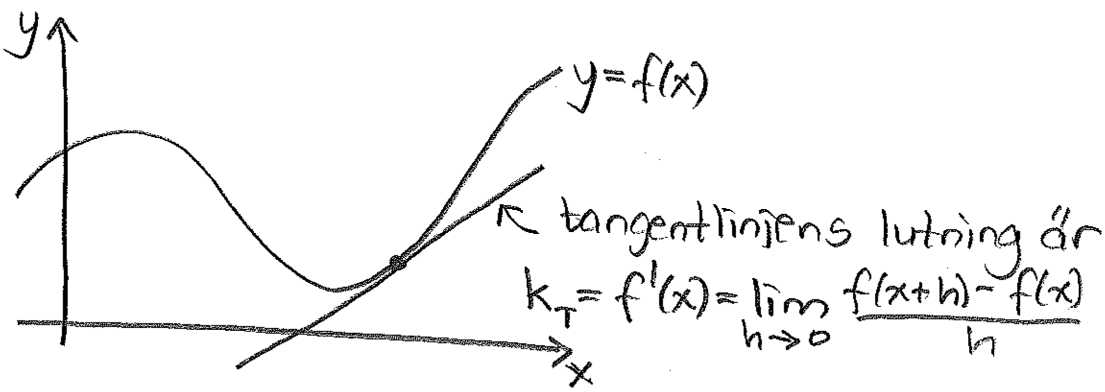


Även i många andra sammanhang är man intresserad av att studera den momentana hastigheten som ett mått på hur snabbt en viss storhet förändras relativt en annan storhet.

Om funktionen $f(x)$ beskriver värdet på en storhet för ett visst värde x på en annan storhet så får vi <u>hastigheten</u> i en godtycklig punkt x med gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

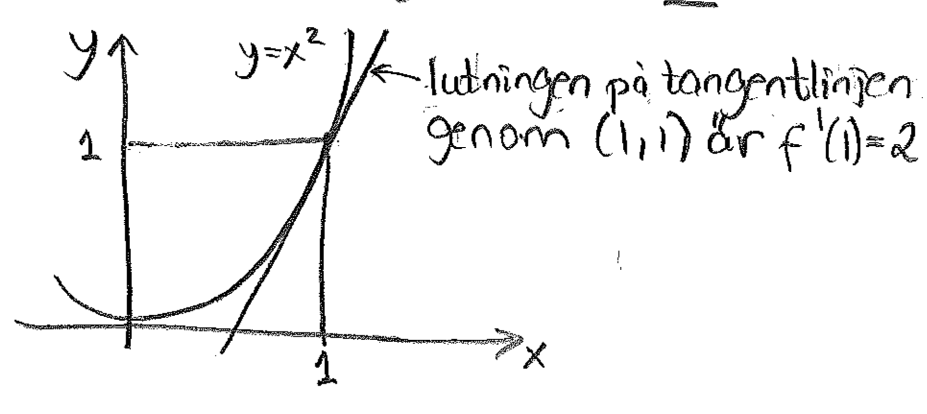
Detta gränsvärde säger vi är <u>derivatan</u> av funktionen $f(x)$ i punkten x och betecknar den med $\underline{f'(x)}$.



<u>Exempel</u>. Låt oss beräkna derivatan av $f(x)=x^2$ i punkten $x=1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = \underline{\underline{2}}$$



På liknande vis kan vi beräkna derivatan i en godtycklig punkt x;

$$\underline{f'(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = \underline{2x}$$

Uppg. Bestäm derivatan av följande funktioner m.h.a. derivatans definition:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ c) $f(x) = C$

Lösn a) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= 3x^2 + 3xh + h^2 \to 3x^2, \text{ då } h \to 0$$

så $\underline{f(x) = x^3}$ har derivatan $\underline{f'(x) = 3x^2}$

b) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} =$$

$$= \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \frac{-1}{(x+h)x} \to \frac{-1}{x^2}, \text{ då } h \to 0$$

så $\underline{f(x) = \frac{1}{x}}$ har derivatan $\underline{f'(x) = \frac{-1}{x^2}}$

c) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{C-C}{h} = \frac{0}{h} = 0 \rightarrow 0$, då $h \rightarrow 0$

så $\underline{f(x)=C}$ har derivatan $\underline{f'(x)=0}$

Mer allmänt kan man visa att om $\underline{f(x)=x^a}$, för något reellt tal a, så är $\underline{f'(x)=ax^{a-1}}$

Notera att detta stämmer på våra exempel ovan

$$f(x)=x^2 \overset{a=2}{\Longrightarrow} f'(x)=2x^1=2x$$

$$f(x)=x^3 \overset{a=3}{\Longrightarrow} f'(x)=3x^2$$

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \overset{a=-1}{\Longrightarrow} f'(x)=(-1)x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$$

Här är några fler exempel på denna formel;

$$\underline{f(x)=x^7} \overset{a=7}{\Longrightarrow} \underline{f'(x)=7x^6}$$

$$\underline{f(x)=\sqrt{x}}=x^{1/2} \overset{a=1/2}{\Longrightarrow} \underline{f'(x)}=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\underline{f(x)=x\sqrt{x}}=x^{3/2} \overset{a=3/2}{\Longrightarrow} \underline{f'(x)}=\frac{3}{2}x^{1/2}=\underline{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

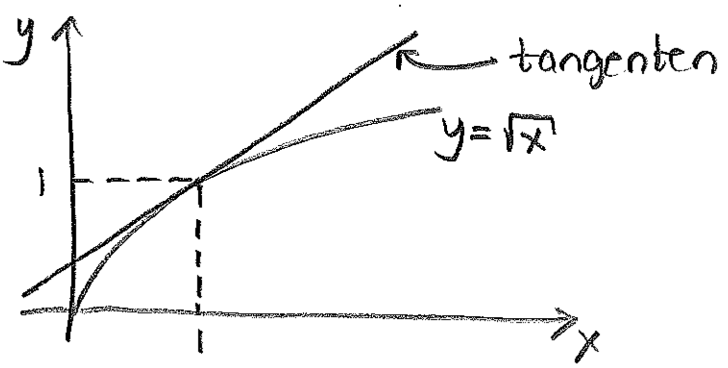
$$\underline{f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}}=x^{-1/2} \overset{a=-1/2}{\Longrightarrow} \underline{f'(x)}=\frac{-1}{2}x^{-3/2}=\underline{\frac{-1}{2x\sqrt{x}}}$$

<u>avs 6.3</u> Vi har sett hur $f'(a)$ kan tolkas som riktningskoeffecient för tangenten genom $(a, f(a))$ så med enpunktsformeln kan <u>tangenten</u> beskrivas med ekvationen;

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$$

<u>Uppg</u> Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y=\sqrt{x}$ i punkten $(1,1)$

<u>lösn.</u>



$f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{2}$

så tangentens ekv. är;

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow \underline{y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$$