

Föreläsning 3

①

Avs. b.4
forts

Betrakta en styckvis definierad funktion

på formen

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dä } x \leq a \\ r(x), & \text{dä } x > a \end{cases}$$

där $g(x)$ och $r(x)$ är deriverbara funktioner.

I detta fall är;

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ x < a}} g(x) = g(a) \quad \text{ty } g \text{ deriverbar} \Rightarrow g \text{ kont.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ x > a}} r(x) = r(a) \quad \text{ty } r \text{ deriverbar} \Rightarrow r \text{ kont.}$$

så för att f skall vara deriverbar i a krävs

bl.a. att $\boxed{g(a) = r(a)}$ (*)

I så fall gäller också att;

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ h < 0}} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} =$$

$$= g'_-(a) = g'(a)$$

ty g deriverbar i a

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h > 0}} \frac{r(a+h) - g(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(a+h) - r(a)}{h} = r'_+(a) = r'(a)$$

enl. (*) ovan

ty r deriverbar i a

så för att f skall vara deriverbar i a

krävs också att $\boxed{g'(a) = r'(a)}$ (**)

(2)

Uppg. Bestäm om möjligt konstanterna c och d ,
 så att $f(x) = \begin{cases} x^2 + c, & \text{då } x \leq 2 \\ d\sqrt{x}, & \text{då } x > 2 \end{cases}$ blir deriverbar i 2.

Lös. Villkoren (*) och (**) ovan ger att;

$$\begin{cases} 4 + c = d\sqrt{2} \\ 4 = \frac{d}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} D(x^2 + c) = 2x \\ D(d\sqrt{x}) = \frac{d}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix}$$

Ur den andra ekv. får vi att $d = 8\sqrt{2}$

som insatt i den första ekv. ger;

$$4 + c = 16 \Rightarrow \underline{c = 12}$$

så f blir deriverbar om $c = 12$ och $d = 8\sqrt{2}$.

Anm. Vi säger att;

- f är deriverbar i punkten a
om $f'(a)$ existerar
- f är deriverbar i ett intervall I
om f är deriverbar i varje punkt i I .
- f är deriverbar
om f är deriverbar i alla punkter i D_f .

Ans. 6.5. forts. På förra föreläsningen såg vi att;

Produkt
regeln

$$\boxed{D[f(x)g(x)] = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)}$$

bevis. $D[f(x)g(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

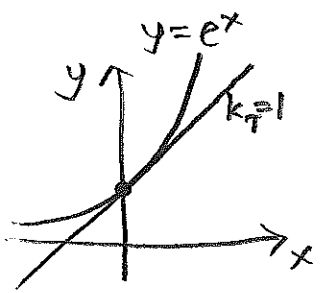
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\rightarrow f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{\rightarrow g(x)} + \underbrace{f(x)}_{\rightarrow f(x)} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\rightarrow g'(x)} \right] =$$

ty g deriverbar
 $\Rightarrow g$ kontinuerlig

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{v.s.b.}$$

Ans. 6.6 Kom inäg från förra delkursen att



$f(x) = e^x$ är den exponentialfunktion vars tangent i punkten $(0, 1)$ har riktningskoeff. $k_T = 1$ (se avs. 2.3). Således är;

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1} \quad (*)$$

(4)

Om vi sätter $h = \ln(1+k)$ i (*) så får vi dessutom

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \Leftrightarrow \\ k \rightarrow 0}} \frac{e^{\ln(1+k)} - 1}{\ln(1+k)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\ln(1+k)} \quad \text{så}$$

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(1+k)}{k} = 1} \quad (**)$$

Anm. (*) och (**) är två s.k. standardgränsvärden och av dessa följer att;

$$\boxed{D[e^x] = e^x} \quad \text{och} \quad \boxed{D[\ln x] = \frac{1}{x}}$$

bevis. $f(x) = e^x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \\ &= e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\substack{\rightarrow 1 \\ \text{enl. (*)}}} \rightarrow e^x, \text{ då } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$f(x) = \ln x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \\ &= \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}}_{\substack{\rightarrow 1 \\ \text{enl. (**)}}} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}, \text{ då } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

obs! $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{h}{x} \rightarrow 0$ VSB.

Ex. $D[xe^x] = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$
 $\uparrow$
 prod. regeln.

Ex. $D[x^2 \ln x] = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$
 $\downarrow$

Kom även ihåg;

Kvot-regeln

$$D\left[\frac{T(x)}{N(x)}\right] = \frac{T'(x)N(x) - T(x)N'(x)}{N(x)^2}$$

Ex. $D\left[\frac{e^x}{\ln x}\right] = \frac{e^x \ln x - e^x \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = e^x \frac{x \ln x - 1}{(\ln x)^2}$

Ex. $D\left[\frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + \ln x}\right] = \frac{(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(e^x + \ln x) - (x^2 + \sqrt{x})(e^x + \frac{1}{x})}{(e^x + \ln x)^2}$

Anm. $D[a \log x] = D\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right] = \frac{1}{\ln a} D[\ln x] = \frac{1}{x \ln a}$

Ex. $D[\lg x] = D[10 \log x] = \frac{1}{x \ln 10}$

Vidare har vi att;

$$D[\sin x] = \cos x$$

bevis. $f(x) = \sin x \Rightarrow$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cosh + \cos x \cdot \sinh - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \underbrace{\frac{\cosh - 1}{h}}_{\rightarrow 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sinh}{h}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \cos x, \text{ då } h \rightarrow 0$$

enl. sats
i avs. 5.3 $\rightarrow$

additionsformel
för sinus.

VSB

(6)

På liknande vis kan man visa att;

$$\boxed{D[\cos x] = -\sin x}$$

Ex. $D[x^2 \sin x] = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

Ex. $D[e^x \cos x] = e^x \cos x + e^x (-\sin x) =$
 $= e^x (\cos x - \sin x)$